



دکتر شو

آموزش نکته به نکته، تست های استاندارد، آزمون های جامع

جلد ۱
درسنامه
تست، آزمون

صفر تا ۱۰۰

ریاضیات جامع کنکور تجربی

دهم، یازدهم و دوازدهم

مطابق با آخرین تغییرات کنکور

اولین مجموعه دارای سامانه آزمون ساز و فیلم های آموزشی

دکتر بهرام دستوریان مهندس محمدحسین طاهری مهندس خداداد گنی

ویراستار علمی: مهندس سید محمد رضا مصطفوی



دکتر شو

آموزش نکته به نکته، تست های استاندارد، آزمون های جامع

جلد ۲
پاسخنامه

صفر تا ۱۰۰

پاسخنامه ریاضیات جامع

کنکور تجربی

دهم، یازدهم و دوازدهم

مطابق با آخرین تغییرات کنکور

اولین مجموعه دارای سامانه آزمون ساز و فیلم های آموزشی

دکتر بهرام دستوریان مهندس محمدحسین طاهری مهندس خداداد گنی

ویراستار علمی: مهندس سید محمدرضا مصطفوی

صفر تا ۱۰۰

ریاضیات جامع کنکور تجربی

دهم، یازدهم و دوازدهم

درسنامه بسیار کامل، تست‌های استاندارد، آزمون‌های جامع

مطابق با آخرین تغییرات کنکور دوازدهم

دکتر بهرام دستوریان / مهندس محمدحسین طاهری / مهندس خداداد کنی

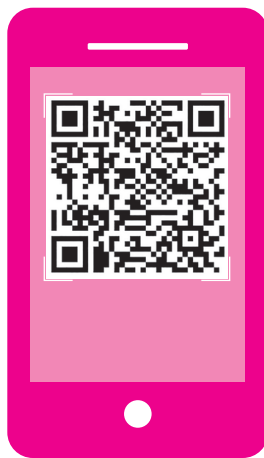
ویراستار علمی: مهندس سیدمحمد رضا مصطفوی



صفر تا ۱۰۰ ریاضیات جامع کنکور تجربی

دهم، یازدهم و دوازدهم

سامانه آزمون ساز آنلاین رایگان



فیلم های آموزشی رایگان



صفر تا ۱۰۰ ریاضیات جامع کنکور تجربی

نام کتاب

لوح برتر

انتشارات

صادق گرچی

مدیر مسئول

بهرام دستوریان، محمدحسین طاهری، خداداد کنی

مؤلفان

سید محمدرضا مصطفوی

ویراستار علمی

شهناز صادقی

حروفچینی و صفحه آرایی

پیمان محمدخانی

طراح جلد

سید محمدرضا مصطفوی

فیلم های آموزشی

اول ۱۴۰۲

نوبت چاپ

۹-۰-۹۳۴۳۴-۶۰۰-۹۷۸

شابک

۵۶۰/۰۰۰ تومان

قیمت

۱۰۰۰

تیراژ

سرشناسه: دستوریان بهرام/ عنوان و نام پدیدار: صفر تا ۱۰۰ ریاضیات جامع کنکور تجربی/ مشخصات نشر: تهران، لوح برتر ۱۴۰۲
مشخصات ظاهری: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۲ * ۲۹ س/م/ شابک ۹-۰-۹۳۴۳۴-۶۰۰-۹۷۸ وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر
شناسه افزوده: طاهری محمدحسین، کنی خداداد/ ویراستار علمی: مصطفوی سید محمدرضا/ شماره کتابشناسی: ۶۷۴۵۶۷۲۱



به موجب ماده ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب
۱۳۴۸/۱۰/۱۱ کلیه حقوق این کتاب برای انتشارات لوح برتر محفوظ می باشد و هیچ
شخص حقیقی یا حقوقی، حق استفاده از آن را ندارد و متخلفان تحت پیگرد
قانونی قرار می گیرند.

تلفن های توزیع و پخش انتشارات لوح برتر

۶۶ ۹۷۱ ۹۷۰

۶۶ ۹۷۱ ۸۰۴

۶۶ ۱۷۵ ۰۵۳

۶۶ ۹۷۳ ۴۷۸

ایتا ۰۹۱۰-۱۷۲۴۰۵۹

آموزش و درسنامه بسیار کامل
مثال‌های کاربردی و نکته‌به‌نکته
تست‌های آموزشی مناسب
آزمون‌های هر درس
تست‌های جامع فصل
نمودار درختی و چکیده هر فصل
کنکورهای سراسری سال‌های گذشته
پاسخنامه کاملاً تشریحی و آموزشی
مطابق با آخرین تغییرات کنکور سراسری



مقدمه ناشر

خیلی ساده بگم: کتاب صفر تا ۱۰۰ ریاضیات جامع کنکور تجربی لوح برتر از نظر درسنامه و آموزش، کامل‌ترین و جامع‌ترین کتابه. از نظر تعداد تست هم سعی کردیم به‌جای تست‌های تکراری و ضعیف، بهترین و باکیفیت‌ترین تست‌ها رو تألیف، جمع‌آوری و دسته‌بندی کنیم.

هر فصل رو به چند درس تقسیم کردیم و توی درس‌آموزهای هر درس، توضیحات کامل و کاربردی رو با زبان ساده گفتیم. هر جا که به مثال نیاز بوده، در قالب مثال‌آموز، ارائه کردیم. تست‌آموزها همون تست‌های آموزشی هستند که باید با دقت و تمرکز به اون‌ها توجه کنین. نکته‌های مهم آموزشی رو هم به‌صورت جداگانه آوردیم. در بعضی جاها هم نکته‌ها رو به‌صورت خودمونی بیان کردیم.

بعد از هر درس، تست‌های باکیفیت و کاربردی رو در سه سطح ساده، متوسط و دشوار مرتب کردیم و پاسخ‌های کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌ها رو هم آوردیم. در پایان هر فصل هم آزمون‌های جامعی رو آوردیم که تمام درس‌های اون فصل رو در بر می‌گیره. بعد از آزمون جامع فصل، خلاصه و چکیده فصل رو برای مرور و جمع‌بندی ارائه کردیم.

درس‌آموزهای این کتاب «فیلم آموزشی» دارن. اگه با گوشی تون رمزینۀ (QRcode) اول هر فصل رو اسکن کنین، می‌تونین فیلم‌های بسیار باکیفیت آموزشی هر درس رو مشاهده کنین که استادان لوح برتر اون‌ها رو درست کردن. این‌طوری یه معلم خصوصی هم در اختیار دارین.

تازه، این همه کار نیست: کتاب صفر تا ۱۰۰ ریاضیات کنکور تجربی لوح برتر یه سامانه آزمون‌ساز آنلاین رایگان هم داره که به‌وسیله اون می‌تونین انواع آزمون‌های «درس‌به‌درس»، «مبحثی» و «جامع» رو برگزار کنین و بلافاصله، کارنامه و نمودارهای پیشرفت تحصیلی خودتون رو ببینین.

خوب، حالا بگید که آیا کتابی کامل‌تر از این سراغ دارین؟ اگه از این کتاب خوشتون اومد، می‌تونید اون رو به دبیرها و دوستانهاتون معرفی کنین.

لطفاً اگه نظر خاصی درباره این کتاب دارین، نظرتون رو از طریق شماره‌تلفن‌های پشت جلد یا شماره ۰۹۱۰۱۷۲۴۰۵۹ توی «ایتا» برای ما بفرستین.

برای همتون آرزوی موفقیت، سلامتی و سرافرازی می‌کنم.

خدا حافظ شما باشه

صادق گرجی

راهنمای استفاده از کتاب

توجه کنین، این مجموعه یک کتاب نیست، بلکه یک بسته آموزشی کامله، چون هم فیلم‌های آموزشی رایگان درسنامه‌ها رو داره و هم یک سامانه آزمون ساز رایگان داره.

* اول از همه، **مقدمه ناشر** و این **راهنما** رو به دقت بخونین.

* به **نمودار درختی** پشت جلد کتاب با دقت نگاه کنین تا بهتر ریاضیات کنکور تجربی رو درک کنین.

* در **فصل صفر**، علاوه بر محاسبات پایه، تقسیم‌بندی جدیدی از مباحث ریاضیات کنکور تجربی رو ارائه کردیم، با مطالعه اون، نگاه شما به درس ریاضی خیلی تغییر می‌کنه.

* مطالب **فصل صفر** رو به دقت و با تمرکز مطالعه و تمرین کنین.

* این کتاب علاوه بر فصل صفر، **نوزده فصل اصلی** دیگه هم داره؛ تازه آخر کتاب، **کنکورهای سال‌های گذشته** رو هم آوردیم.

* **نمای کلی فصل** رو که اول هر فصل گذاشتیم، با دقت بخونین تا هم با اون فصل، به طور کلی آشنا بشین و هم از **جایگاه و اهمیت** اون توی کنکور سراسری باخبر بشین.

قسمت‌های اصلی هر فصل رو با نمادهای ویژه‌ای مشخص کردیم:

(۱)  **درس آموز:** همون درسنامه و بخش آموزشی؛ درس‌آموزها رو با دقت بخونین؛

(۲)  **مثال آموز:** مثال‌های آموزشی برای درک بهتر درسه؛

(۳)  **تست آموز:** تست‌های آموزشی برای آموزش و تسلط بیشتر؛

(۴)  **نکته آموزشی:** نکته‌های مهم و کاربردی درسه؛

(۵)  **خودمونی:** نکته‌های آموزشی به زبان صمیمانه‌ست؛

(۶)  **هشدار آموزشی:** نکته‌های خیلی مهمیه که باید مراقب اون‌ها باشین؛

(۷) **تست آزمون:** آزمون مبحثی در پایان هر درسه؛

(۸) **آزمون جامع:** آزمون جامع در پایان هر فصله؛

(۹) **خلاصه و چکیده:** خلاصه و مرور کل فصل توی یه نگاه در قالب یه نمودار درختیه.



این توصیه‌ها رو جدی بگیرین

✓ **درس‌آموزها** رو به‌دقت بخونین. مثال‌های آموزشی رو به‌صورت تشریحی حل کنین. تست‌آموزهای هر درس رو با دقت حل کنین و نکته‌های اون رو بررسی کنین. اگه توی یادگیری مفاهیم اصلی مشکلی دارین، خودتون رو گول نزنین، یه‌بار دیگه هم درس‌آموزها و مثال‌آموزها رو بخونین.

✓ از **فیلم‌های آموزشی** غافل نشید. کافیه گوشی تونو روی رمزینه (QRcode) هر فصل بگیرید تا فیلم‌های آموزشی هر درس رو باکیفیت علمی بالا که توسط استادان لوح برتر تهیه شده، مشاهده کنین.

✓ به **نکته‌های آموزشی** و مطالب مهمی که توی **خودمونی‌ها** اومده دقت کنین. مراقب **هشدارهای آموزشی** باشین.

✓ بعداز اینکه درس‌های هر فصل رو به‌دقت خوندین، **تست‌آزمون‌های آخر هر درس** رو مثل یه تمرین تشریحی حل کنین. دقت کنین که این سؤال‌ها به‌ترتیب در سه سطح **ساده**، **متوسط** و **دشوار** مرتب شدن. یادتون باشه که بدون مراجعه به پاسخ‌های تشریحی، تست‌ها رو حل کنین و بعداز اینکه حلشون کردین، از پاسخ‌های تشریحی برای صحت‌سنجی استفاده کنین.

✓ از **سامانه‌آزمون‌ساز آنلاین رایگان** لوح برتر برای برگزاری انواع آزمون‌های جامع، مبحثی و درس‌آموز آناستفاده کنین.

✓ بعداز اینکه درس‌های هر فصل رو با دقت مطالعه کردین و تست‌های اون رو با تمرکز تمام حل کردین، نوبت می‌رسه به «**آزمون جامع فصل**». تست‌های آزمون‌های جامع فصل، ترکیبی هستن و همه‌ی مباحث فصل رو پوشش میدن. بازم سعی کنین بدون اینکه به پاسخ‌های تشریحی نگاه کنین، خودتون اون‌ها رو حل کنین. از پاسخنامه‌ی تشریحی برای رفع اشکال استفاده کنین.

✓ در پایان، برای اینکه کلی‌تر و عمیق‌تر مباحث فصل رو درک کنین، می‌تونین از **خلاصه و چکیده** فصل استفاده کنین که برای مرور و یادآوری هم خیلی مناسبه. تو دوران **جمع‌بندی یعنی آخرین ماه قبل از کنکور**، این قسمت خیلی به دردتون می‌خوره.

✓ **تست‌های نکته‌دار** رو برای دوران جمع‌بندی، علامت‌گذاری کنین.

✓ **خودتون رو گول نزنین**، بازم می‌گیم اگه چیزی رو خوب یاد نگرفتین، دوباره درس‌آموزها و نکته‌ها رو با دقت بخونین و مثال‌آموزها رو حل کنین.

سامانه‌آزمون‌ساز لوح برتر رو دست‌کم نگیرین

سامانه‌آزمون‌ساز آنلاین لوح برتر به شما کمک می‌کنه که خودتون رو برای آزمون‌های آزمایشی هفتگی و کنکور سراسری آماده کنین و با تمرین تکنیک‌های تست‌زنی، تسلط بر مطالب درسی و مهارت تست‌زنی‌تون رو افزایش بدین. سامانه سه مدل آزمون داره:

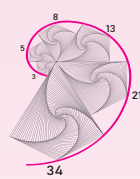
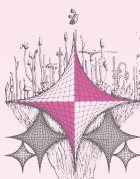
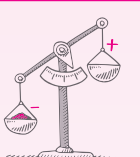
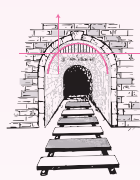
آزمون درس‌به‌درس و مبحثی: بعداز مطالعه هر فصل، از **سامانه‌آزمون‌ساز** برای برگزاری آزمون درس‌به‌درس و مبحثی استفاده کنین.

آزمون جامع دلخواه: وقتی چند تا فصل رو خوندین می‌تونین از آزمون‌های جامع دلخواه برای برگزاری آزمون‌های جامع اون چند فصل استفاده کنین.

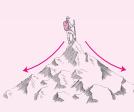
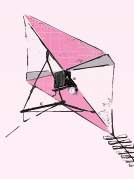
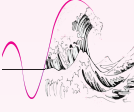
آزمون جامع: دو ماه مونده به کنکور، از آزمون‌های جامع استفاده کنین. تا وضعیت کنکور سراسری رو شبیه‌سازی کنین.



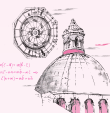
فهرست و عناوین اصلی

نمادها	عنوان	کتاب درسی	پیش نیاز	تعداد تست ها
	فصل صفر: مقدمات ریاضی درس آموز ۱: مقدمات و محاسبات پایه درس آموز ۲: سوتی های کنکوری	کتاب های درسی سال های قبل	جمع، تفریق ضرب و تقسیم	
	فصل ۱: مجموعه درس آموز ۱: مفهوم مجموعه درس آموز ۲: متمم یک مجموعه	ریاضی دهم، فصل ۱، درس های ۱ و ۲	جمع، تفریق ضرب و تقسیم	۱۹+۶۰
	فصل ۲: الگو و دنباله درس آموز ۱: الگو درس آموز ۲: دنباله درس آموز ۳: انواع دنباله	ریاضی دهم، فصل ۱، درس های ۳ و ۴	فصل ۱	۴۷+۸۳
	فصل ۳: توان های گویا و عبارت های جبری درس آموز ۱: ریشه و توان درس آموز ۲: توان های گویا درس آموز ۳: عبارت های جبری	ریاضی دهم، فصل ۳	جمع، تفریق ضرب و تقسیم	۵۲+۱۴۰
	فصل ۴: تعیین علامت و نامعادله درس آموز ۱: تعیین علامت درس آموز ۲: نامعادله	ریاضی دهم، فصل ۴، درس ۳	فصل ۳ فصل ۶	۲۵+۹۱
	فصل ۵: معادله های گویا و رادیکالی درس آموز ۱: معادله های گویا درس آموز ۲: معادله های رادیکالی	ریاضی یازدهم، فصل ۱، درس ۱	فصل ۳ فصل ۴	۲۴+۹۱
	فصل ۶: معادله و تابع درجه دوم درس آموز ۱: معادله درجه دوم درس آموز ۲: تابع درجه دوم	ریاضی دهم، فصل ۴، درس های ۱ و ۲ ریاضی یازدهم، فصل ۱، درس ۱	فصل ۳	۴۶+۱۴۵
	فصل ۷: هندسه تحلیلی درس آموز ۱: معادله خط و وضعیت نسبی دو خط درس آموز ۲: وضعیت نسبی نقطه و خط	ریاضی یازدهم، فصل ۱، درس ۱	جمع، تفریق، ضرب و تقسیم	۲۹+۶۷

فهرست و عناوین اصلی

نمادها	عنوان	کتاب درسی	پیش نیاز	تعداد تست ها
	فصل ۸: تابع قدر مطلق و جزء صحیح درس آموز ۱: تابع قدر مطلق درس آموز ۲: تابع جزء صحیح	ریاضی دهم، فصل ۵، درس ۳ ریاضی یازدهم، فصل ۳، درس ۱	فصل ۳ فصل ۴ فصل ۶	۳۲+۷۰
	فصل ۹: تابع درس آموز ۱: مفهوم تابع و بازنمایی آن درس آموز ۲: دامنه و برد توابع و تساوی دو تابع درس آموز ۳: انتقال نمودارها درس آموز ۴: انواع توابع درس آموز ۵: توابع چندجمله ای درس آموز ۶: اعمال جبری روی توابع درس آموز ۷: ترکیب توابع درس آموز ۸: تابع یک به یک و وارون تابع	ریاضی دهم، فصل ۵ ریاضی یازدهم، فصل ۳ ریاضی دوازدهم، فصل ۱	فصل ۳ فصل ۴ فصل ۵ فصل ۶ فصل ۸	۱۰۵+۴۳۵
	فصل ۱۰: توابع نمایی و لگاریتمی درس آموز ۱: تابع نمایی درس آموز ۲: تابع لگاریتمی درس آموز ۳: معادلات و نامعادلات نمایی و لگاریتمی درس آموز ۴: نمودار و کاربردها	ریاضی یازدهم، فصل ۵	فصل ۳ فصل ۹	۶۹+۹۸
	فصل ۱۱: هندسه پایه درس آموز ۱: ترسیم های هندسی درس آموز ۲: استدلال و قضیه تالس درس آموز ۳: تشابه دو مثلث درس آموز ۴: نتایج تشابه مثلث ها	ریاضی یازدهم، فصل ۲	فصل ۶	۲۷+۹۴
	فصل ۱۲: مثلثات درس آموز ۱: واحدهای اندازه گیری زاویه درس آموز ۲: روابط بین نسبت های مثلثاتی درس آموز ۳: معادلات مثلثاتی درس آموز ۴: تناوب و نمودار توابع مثلثاتی	ریاضی دهم، فصل ۲ ریاضی یازدهم، فصل ۴ ریاضی دوازدهم، فصل ۲	فصل ۳ فصل ۴ فصل ۶ فصل ۹	۱۱۷+۲۱۹
	فصل ۱۳: حد و پیوستگی درس آموز ۱: بخش پذیری چندجمله ای ها درس آموز ۲: مفاهیم اولیه حد درس آموز ۳: حد صفر صفر درس آموز ۴: پیوستگی درس آموز ۵: حد بی نهایت (حد نامتناهی) درس آموز ۶: حد در بی نهایت	ریاضی یازدهم، فصل ۶ ریاضی دوازدهم، فصل ۲	فصل ۳ فصل ۸ فصل ۹ فصل ۱۰ فصل ۱۲	۱۷۵+۱۸۹

فهرست و عناوین اصلی

نمادها	عنوان	کتاب درسی	پیش نیاز	تعداد تست ها
	فصل ۱۴ : مشتق ۶۱۱ درس آموز ۱: آشنایی با مفهوم مشتق درس آموز ۲: تابع های مشتق و فرمول های مشتق درس آموز ۳: مشتق پذیری و مشتق ناپذیری درس آموز ۴: آهنگ تغییر	ریاضی دوازدهم، فصل ۴	فصل ۷ فصل ۸ فصل ۹ فصل ۱۰ فصل ۱۳	۱۱۹+۱۹۰
	فصل ۱۵ : کاربرد مشتق ۶۹۳ درس آموز ۱: اکسترمم های تابع درس آموز ۲: بهینه سازی	ریاضی دوازدهم، فصل ۵	فصل ۳ فصل ۹ فصل ۱۳ فصل ۱۴	۶۰+۱۲۵
	فصل ۱۶ : شمارش بدون شمردن ۷۳۷ درس آموز ۱: شمارش و جایگشت درس آموز ۲: ترتیب و ترکیب	ریاضی دهم، فصل ۶	جمع، تفریق، ضرب و تقسیم	۳۰+۸۵
	فصل ۱۷ : احتمال ۷۵۷ درس آموز ۱: احتمال مقدماتی درس آموز ۲: قوانین احتمال درس آموز ۳: احتمال شرطی درس آموز ۴: پیشامدهای مستقل درس آموز ۵: قانون احتمال کل	ریاضی دهم، فصل ۷، درس ۱ ریاضی یازدهم، فصل ۷، درس ۱ ریاضی دوازدهم، فصل ۷	فصل ۱ فصل ۱۶	۴۹+۲۰۵
	فصل ۱۸ : آمار ۷۹۹ درس آموز ۱: مفاهیم مقدماتی درس آموز ۲: آمار توصیفی و شاخص های مرکزی درس آموز ۳: معیارهای پراکندگی	ریاضی دهم، فصل ۷، درس های ۲ و ۳ ریاضی یازدهم، فصل ۷، درس ۲	جمع، تفریق، ضرب و تقسیم	۳۴+۹۲
	فصل ۱۹ : هندسه دوازدهم ۸۲۳ درس آموز ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی درس آموز ۲: بیضی درس آموز ۳: دایره	ریاضی دوازدهم، فصل ۶	فصل ۷ فصل ۱۱	۴۹+۹۹
	کنکورهای سراسری ۸۶۵ کنکورهای داخل و خارج تیرماه ۱۴۰۱ کنکورهای داخل دی ماه ۱۴۰۱ کنکورهای داخل و خارج تیرماه ۱۴۰۲	ریاضی دهم، یازدهم و دوازدهم	کل فصل ها	۱۵۰
				۳۸۳۶



فیلم‌های آموزشی

صفحه

فصل

مقدمات ریاضی

بهترین لباس، رومی پوشم، بهترین عطر، رومی زنم،
« ساعت مچی فراموش نشود »؛ برای دیدن تو باید
مقدمه‌چینی کرد.



نمای کلی فصل

- درس اول؛ مقدمات و محاسبات پایه
- درس دوم؛ سوتی‌های کنکوری

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: طبقه‌بندی کاربردی فصل‌ها / مقدمات و محاسبات ریاضی پایه / سوتی‌های کنکوری
- ✓ کاربردهای فصل: تمام فصل‌ها



طبقه‌بندی کاربردی فصل‌ها

چشم‌ها را باید شست، جور دیگر باید دید

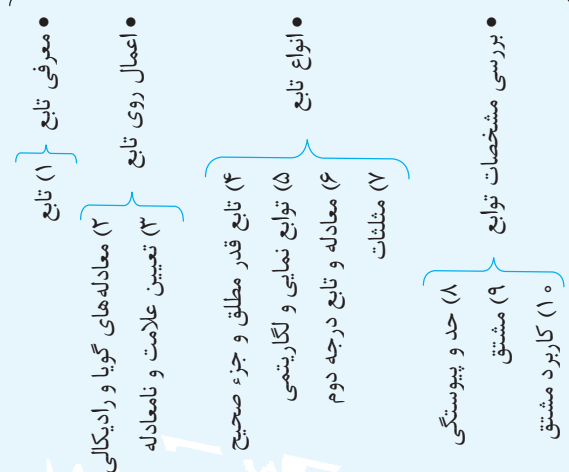
متفاوت به ریاضی نگاه کنید:

بچه‌ها بیایید به جور دیگه به ریاضیات رشته تجربی نگاه کنیم؛ شاید این نگاه به کم عجیب باشه، اما خیلی بهتون کمک می‌کنه که درک بهتری از ریاضیات کنکور رشته تجربی داشته باشین تا بتونین هم مطالب رو بهتر یاد بگیرین و هم تست‌ها رو راحت‌تر بزنید.

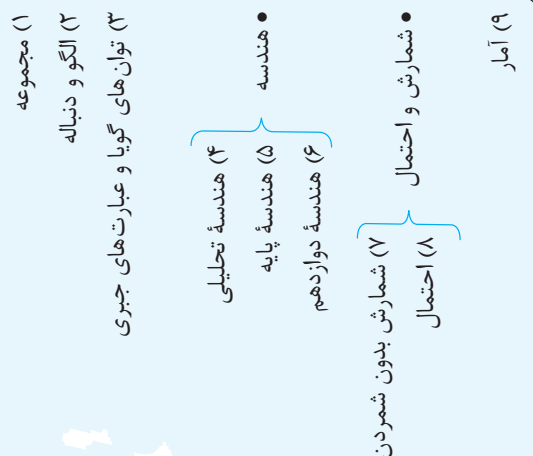
به اعتقاد ما ریاضیات کنکور تجربی به دو بخش کلی تقسیم می‌شه: فصل‌های تابعی و فصل‌های غیرتابعی. به نمودار درختی زیر نگاه کنید:

ریاضیات کنکور تجربی (فصل ۱۹)

فصل‌های تابعی (فصل ۱۰)



فصل‌های غیرتابعی (فصل ۹)



این نمودار می‌تونه خیلی بهتون کمک کنه. برای اینکه این تقسیم‌بندی رو بهتر متوجه بشین، این نمودار رو با هم مرور می‌کنیم و بیشتر توضیح می‌دیم:

آشنایی با فصل‌های غیرتابعی

۱. فصل (۱)، مجموعه: این فصل مجموعه‌های مختلف رو معرفی و اشتراک اون‌ها رو بررسی می‌کنه.

۲. فصل (۲)، الگو و دنباله: این فصل به ما می‌گه تعدادی عدد چطوری می‌تونن پشت سر هم بیان و دنباله‌های حسابی و هندسی رو تشکیل بدن.

۳. فصل (۳)، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: این فصل ریشه اعداد و انواع عبارت‌های جبری رو بررسی می‌کنه.

• هندسه:

۴. فصل (۷)، هندسه تحلیلی: این فصل فاصله بین خط و نقطه، وضعیت دو خط نسب به هم و نمونه‌هایی از این دست رو بررسی می‌کنه.

۵. فصل (۱۱)، هندسه پایه: این فصل اشکال هندسی، به‌خصوص مثلث‌ها رو بررسی می‌کنه و درباره قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها بحث می‌کنه.

۶. فصل (۱۹)، هندسه دوازدهم: این فصل مقاطع مخروطی شامل؛ دایره و بیضی رو بررسی می‌کنه.

• شمارش و احتمال:

۷. فصل (۱۶)، شمارش بدون شمردن: این فصل بهتون یاد می‌ده که چطوری میشه چند نفر رو کنار هم قرار داد یا چطوری می‌تونید از بین چند مهره به طرق مختلف تعدادی مهره رو انتخاب کنین.

۸. فصل (۱۷)، احتمال: این فصل احتمال رخ دادن پدیده‌های مختلف رو بررسی می‌کنه.

۹. فصل (۱۸)، آمار: این فصل متغیرهای کیفی مثل کیفیت غذا، متغیرهای کمی مثل قد انسان، مفاهیم جامعه و آمار و ... رو بررسی می‌کنه.



آشنایی با فصل‌های تابعی

۱. فصل (۹)، تابع: این فصل ماهیت تابع رو معرفی می‌کنه.

• اعمال روی تابع (مثل معادله و نامعادله):

۲. فصل (۴)، تعیین علامت و نامعادله: این فصل درباره علامت توابع صحبت می‌کنه و با استفاده از اون می‌تونیم بفهمیم که تابع در چه بازه‌هایی مثبت و در چه بازه‌هایی منفیه و همچنین مشخص می‌کنه دو تابع نسبت به هم چه وضعیتی دارن؛ یعنی در کدام بازه‌ها تابعی بالاتر از تابع دیگه‌ای قرار می‌گیره.

۳. فصل (۵)، معادله‌های گویا و رادیکالی: این فصل درباره برابری دو تابع صحبت می‌کنه و نقاط برخورد دو تابع رو پیدا می‌کنه.

• انواع تابع (مثل تابع قدرمطلق و تابع جزء صحیح و توابع مثلثاتی):

۴. فصل (۸)، تابع قدر مطلق و جزء صحیح: این فصل دو نوع تابع ویژه یعنی تابع قدر مطلق و تابع جزء صحیح رو معرفی و مسائل مرتبط به اون‌ها رو بررسی می‌کنه.

۵. فصل (۱۰)، توابع نمایی و لگاریتمی: این فصل توابع نمایی و لگاریتمی رو معرفی و مسائل مرتبط به اون‌ها رو بررسی می‌کنه.

۶. فصل (۶)، معادله و تابع درجه دوم: این فصل به مدل ویژه و بسیار کاربردی از تابع به نام تابع درجه دوم رو معرفی می‌کنه و مسائل مرتبط به اون رو توضیح می‌ده.

۷. فصل (۱۲)، مثلثات: این فصل توابع مثلثاتی (سینوسی و کسینوسی) رو معرفی می‌کنه و مسائل مرتبط به اون رو بررسی می‌کنه.

• بررسی مشخصات توابع (شیب، ماکسیمم و مینیمم، حد و پیوستگی توابع):

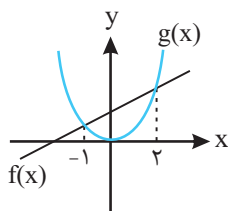
۸. فصل (۱۳)، حد و پیوستگی: این فصل درباره حدپذیری و پیوسته بودن توابع بحث می‌کنه و با استفاده از اون می‌تونیم حد توابع رو در نقاط گوناگون محاسبه کنیم.

۹. فصل (۱۴)، مشتق: این فصل شیب توابع یا به‌طور دقیق‌تر، شیب خط مماس بر توابع در نقاط مختلف رو بررسی می‌کنه.

۱۰. فصل (۱۵)، کاربرد مشتق: این فصل به‌طور کلی ماکزیمم و مینیمم توابع رو پیدا می‌کنه.

شاید این تقسیم‌بندی براتون عجیب و جدید باشه. احتمالاً فکر می‌کردین که فصل معادله‌های گویا و رادیکالی هیچ ربطی به تابع نداره؛ ولی دقت کنین • معادله $x^2 = x + 2$ در واقع می‌گه:

به‌ازای چه مقادیری از x ، تابع $f(x) = x + 2$ با تابع $g(x) = x^2$ برخورد می‌کنه؟



که جواب -1 و 2 می‌شه.

دقت کنین که توی معادله $x + 5 = 0$ هم درباره تساوی $f(x) = x + 5$ و $g(x) = 0$ بحث می‌شه.

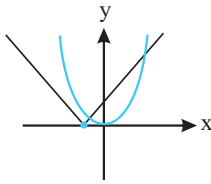
مثلاً وقتی می‌گیم $y = x^2 - 3x + 2$ رو تعیین علامت کنین، یعنی مشخص کنین که در چه بازه‌هایی این تابع بالای محور x هاست، در چه بازه‌هایی این تابع پایین محور x هاست و در چه بازه‌هایی این تابع صفر است.

یا مثلاً فصل کاربرد مشتق به دنبال پیدا کردن نقاط $\max$ و $\min$ تابع است. پس در واقع • فصل از ریاضی تجربی به طور مستقیم به تابع ربط داره و ۹ فصل دیگه ارتباط مستقیم با فصل تابع نداره.

همچنین دقت کنین که برای یادگیری فصل ۱۷، اول باید فصل ۱۶ رو خوب یاد بگیرین.

این تقسیم‌بندی به شما کمک می‌کنه که ریاضی رو خیلی بهتر توی ذهنتون طبقه‌بندی کنین و فصل‌ها رو بهتر درک کنین. الان دیگه نمی‌گین: «وای! ریاضی ۱۹ تا فصله». نه! ریاضی دو بخشه: فصل‌های تابعی که خودش از ۴ بخش تشکیل شده؛ فصل‌های غیرتابعی که از ۶ بخش تشکیل شده.

برای حل مسائل در فصل‌های تابعی سعی کنید نموداری داشته باشید؛ مثلاً وقتی می‌گن معادله $x^2 = |x+1|$ چند جواب دارد، سعی کنید نمودار این معادله رو تصور کنید.



بهبه بخوانید

اگر دانش‌آموز دهم یا یازدهم هستید و این کتاب رو می‌خوانید، تکلیفتون مشخصه، باید به ترتیب کتاب درسی، فصل‌ها رو بخونید. ولی اگه کنکوری هستید و می‌خواهید این کتاب رو بخونی، سه روش داره:

روش اول: طبق ترتیب کتاب شروع کنی و تا آخر بری.

یادآوری:

قبلاً گفتیم، ریاضی تجربی رو می‌شه به دو دسته فصل‌های تابعی و غیرتابعی تقسیم کرد:

فصل‌های تابعی: ۱. تابع (فصل ۹)؛ ۲. معادله‌های گویا و رادیکالی (فصل ۵)؛ ۳. تعیین علامت و نامعادله (فصل ۴)؛ ۴. تابع قدرمطلق و جزء صحیح (فصل ۸)؛ ۵. توابع نمایی و لگاریتمی (فصل ۱۰)؛ ۶. معادله و تابع درجه دوم (فصل ۶)؛ ۷. مثلثات (فصل ۱۲)؛ ۸. حد و پیوستگی (فصل ۱۳)؛ ۹. مشتق (فصل ۱۴)؛ ۱۰. کاربرد مشتق (فصل ۱۵).

فصل‌های غیرتابعی: ۱. مجموعه (فصل ۱)؛ ۲. الگو و دنباله (فصل ۲)؛ ۳. توان‌های گویا و عبارت‌های جبری (فصل ۳)؛ ۴. هندسه تحلیلی (فصل ۷)؛ ۵. هندسه پایه (فصل ۱۱)؛ ۶. هندسه دوازدهم (فصل ۱۹)؛ ۷. شمارش بدون شمردن (فصل ۱۶)؛ ۸. احتمال (فصل ۱۷)؛ ۹. آمار (فصل ۱۸).

روش دوم: اگر از ۱۰ تا فصل تابعی یا کلاً از ریاضی می‌ترسی از فصل‌های غیرتابعی شروع کن تا موتور گرم بشه. به هر ترتیبی هم که دوست داری بخون؛ چون این فصل‌ها خیلی به هم مرتبط نیستن. بعد که این ۹ فصل تموم شد، برو سراغ فصل‌های تابعی، ولی با همین ترتیبی که این بالا نوشتیم؛ یعنی از فصل «تابع» شروع کن تا بررسی به فصل «کاربرد مشتق».

روش سوم: اگر از فصل‌های تابعی خوشش میاد (مثل خود من)، اول برو سراغ فصل‌های تابعی، ولی حواست باشه با همون ترتیبی که گفتیم بخون. از فصل «تابع» شروع کن تا بررسی به فصل «کاربرد مشتق».

(راستی، اکثر بچه‌ها از هندسه می‌ترسن، اگه تو هم جزء این دسته‌ای، اصلاً نگران نباش، این فصل‌ها رو آخر کار بخون؛ سعی کردیم این فصل‌ها رو خیلی روون توضیح بدیم تا کارت راه بیفته.)

مقدمات و محاسبات ریاضی

اگه حس می‌کنی از ریاضی هیچی بلد نیستی یا پایه‌ی ضعیفی داری یا به هر دلیلی از ریاضی می‌ترسی یه نگاه به این فصل بنداز، بعد با خیال راحت برو بقیه فصل‌ها رو شروع کن و نگران هیچی هم نباش. تک‌تک فصل‌ها رو خیلی روون توضیح دادیم که خوب متوجه بشی و موفق عمل کنی. برو با من.

نیازی نیست بگم جمع دو عدد منفی، می‌شه منفی: $(-2 - 3 = -5)$.

یا اینجا $(2 - 4 = -2)$ می‌شه علامت بزرگتره! پس بریم از جمع و تفریق کسرها شروع کنیم.

۱. **جمع و تفریق کسرها (مخرج مشترک گیری):** بهتره اول کسرها رو ساده کنیم بعد مخرج مشترک بگیریم، این طوری:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

اگر مخرج‌ها عددهای کوچکی بودن مثل نمونه بالا، برای مخرج مشترک گرفتن، دو عدد رو در هم ضرب می‌کنیم.

اگر عددها بزرگ بودن، کم‌کم می‌گیریم. (کم‌کم یعنی کوچکترین مضرب مشترک، آخر این فصل یادت میدم چطور به‌دست بیاری) فعلاً حواست اینجا باشه.



$$\frac{7}{180} - \frac{5}{48} = \frac{4(7) - 15(5)}{720}$$

$$48 \text{ و } 180 \text{ کمم} = [180, 48] = 720$$

۲. ضرب دو کسر:

صورت در صورت ضرب میشه و مخرج در مخرج:

$$\frac{7}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{7 \times 5}{2 \times 3} = \frac{35}{6}$$

۳. تقسیم دو کسر:

الف) دور در دور، نزدیک در نزدیک: (یادت باشه دور در دور همیشه میاد تو صورت)

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$$

ب) کسر اول ضرب در معکوس کسر دوم:

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$$

۴. برای محاسباتی مثل $(2^3 - 6) \div 2 + 8 \div 2 - 4 \times 3$

اول اینکه علامت‌های جمع (+) و تفریق (-) رو مثل یک دیوار بزرگ ببین که قسمت‌های مختلف رو از هم جدا کرده، این جوری:

$$2 \times 3 - 4 \div 2 + 8 \div (2^3 - 6)$$

دیوار جمع دیوار منها

حالا مقدارهای قبل و بعد از این دیوارها رو حساب کن.

خواست باشه اول برو سراغ پرانتزها؛ یعنی به جای $(2^3 - 6)$ بنویس ۲.

$$6 - 2 + 4$$

تو این مرحله فقط جمع (+) و تفریق (-) داریم و مهم نیست اول کدوم رو انجام بدی:

$$6 - 2 + 4 = 8$$

۵. چندتا قانون مهم:

الف) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) $\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = a^{m-n}$

ج) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

د) $(a^m)^n = a^{mn}$

ه) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

معادله‌ها و نامعادله‌ها

معادله: هدف از حل معادله به دست آوردن مقادیر X است.

$$2x - 1 = 5 \xrightarrow[\text{مجهول‌ها یک طرف}]{\text{معلوم‌ها یک طرف}} 2x = 5 + 1 \Rightarrow x = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$3x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow 3x - 2x = -1 - 2 \Rightarrow x = -3$$

نامعادله: هدف از حل نامعادله به دست آوردن مقادیر X است.

در نامعادله همه چیز مثل معادله است فقط وقتی طرفین در عدد منفی ضرب یا تقسیم بشن جهت نامساوی عوض می شه:

$$-2X > 4 \xrightarrow[\text{عددی منفی است}]{\text{چون } -2} X < \frac{4}{-2} \Rightarrow X < -2 \text{ (جهت عوض شد)}$$

$$\frac{3}{-4} < X \Rightarrow 3 > (-4)(X) \text{ (جهت عوض شد)}$$

$$\frac{3}{4} < X \Rightarrow 3 < (4)(X)$$

دقت کن برای $\frac{3}{X} < 4$ نمی تونیم X رو ببریم اون طرف!

چون اصلاً نمی دونیم علامت X مثبت یا منفی.

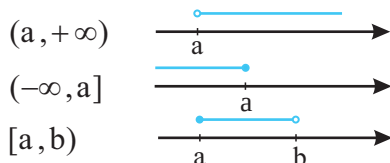
نیای بگی X مثبت یا نه! شاید X برابر با -2 باشه!

نکته مهم: علامت X نامعلومه، همچنین علامت $-X$ هم نامعلومه.

علامت X^2 همواره مثبت نیست؛ در واقع X^2 یا مثبت یا صفر ≥ 0 است.

بازه و مجموعه

شکل های زیر رو نگاه کن:

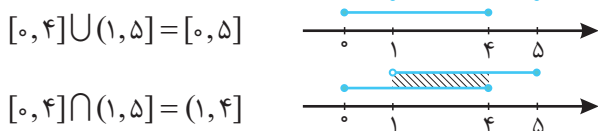


متوجه شدی دیگه:

اگه خود عدد تو بازه باشه، بازه بسته می شه؛ این جوری $[a, b]$.

اگه خود عدد تو بازه نباشه، بازه باز می شه؛ این جوری (a, b) .

اجتماع و اشتراک: $\cup$ علامت اجتماع و $\cap$ علامت اشتراک:



چندتا مجموعه مهم:

مقدمات ریاضی

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ اعداد طبیعی

$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ اعداد صحیح

$\mathbb{R}$ همه اعداد روی محور اعداد حقیقی

عبارت های جبری و اتحادها

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

ضرب عبارت های جبری و اتحاد:

به طور کلی ضرب دو عبارت این طوره:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

چندتا اتحاد:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases} \text{ چاق و لاغر}$$

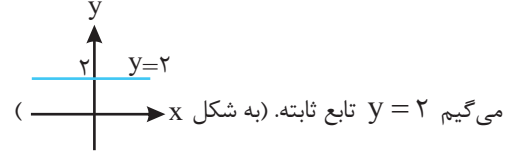
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ مزدوج}$$



تابع

تابع: می‌گیم $y = x$ یک تابع درجه ۱ است چون بالاترین توان x ، یک است. (تابع درجه ۱ به شکل $\diagup$ یا $\diagdown$)

می‌گیم $y = x^2 + 2x + 1$ هم یک تابع درجه ۲ است. (به شکل سهمی $\cup$ یا $\cap$)

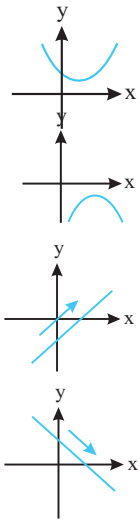


مهم: y از x تبعیت می‌کند؛ پس می‌گیم y تابع x است پس:
تو شکل مقابل می‌گیم تابع مثبت چون y اینجا مثبت:

تو این شکل می‌گیم تابع منفی: (چون y اینجا منفی)

تو این شکل می‌گیم تابع صعودیه:

تو این شکل می‌گیم تابع نزولیه:



چندتا تابع معروف: بهتره این‌ها رو حفظ باشی:

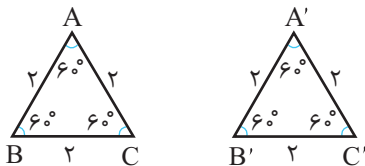
	تابع همانی		تابع ثابت
	تابع درجه ۲		تابع قدر مطلق
	تابع سینوسی		تابع کسینوسی
$x \in [0, 2\pi]$		$x \in [0, 2\pi]$	

قدر مطلق عدد منفی رو مثبت می‌کنه یعنی:

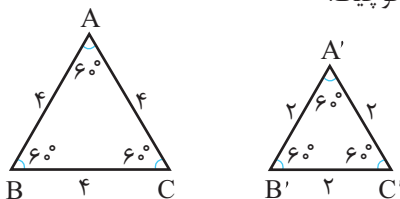
$$\begin{aligned} |2| &= 2 \\ |-2| &= 2 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

هندسه

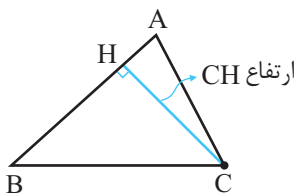
۱. هم‌نهشت: وقتی می‌گن دوتا مثلث هم‌نهشت هستن یعنی کپی هم هستن، عین هم.



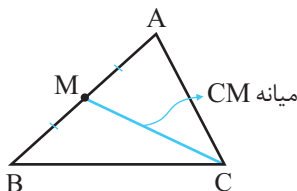
۲. متشابه: وقتی می‌گن دوتا مثلث متشابه هستن یعنی شبیه هم هستن ولی معمولاً یکیش بزرگه و یکیش کوچیک.



۳. ارتفاع: اگر از یک رأس به ضلع مقابل (یا امتداد آن) عمود کنیم، ارتفاع به‌دست میاد. (هر مثلث سه ارتفاع دارد)



۴. میانه: اگر از یک رأس به وسط ضلع مقابل وصل کنیم، میانه به‌دست میاد. (هر مثلث سه میانه دارد)



ب.م.م ک.م.م

ب.م.م: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک: یعنی بزرگترین عددی که هر دو عدد مدنظر بر آن بخش‌پذیرند. مثلاً بزرگترین عددی که هم ۱۸ و هم ۱۲ بر اون بخش‌پذیر هستن، میشه عدد ۶.

$$\left(\begin{array}{c|c} 12 & 6 \\ \hline 12 & 2 \\ \hline \circ & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 18 & 6 \\ \hline 18 & 3 \\ \hline \circ & \end{array} \right)$$

روش به‌دست‌آوردن: دو عدد را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. فقط عامل‌های مشترک با توان کمتر را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 480 = 2^5 \times 3 \times 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{پایه‌های ۳ و ۲} \\ \text{مشترک‌اند} \end{array} \rightarrow (480, 180) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

ک.م.م: کوچکترین مضرب مشترک، یعنی کوچکترین عددی که هر دو عدد مدنظر بخش‌پذیر. مثلاً کوچکترین عددی که هم بر ۱۲ و هم بر ۱۸ بخش‌پذیره می‌شه ۳۶؛ پس می‌گیریم ک.م.م ۱۲ و ۱۸ می‌شه ۳۶، $[12, 18] = 36$.

روش به‌دست‌آوردن: دو عدد رو تجزیه می‌کنیم، بعد عامل‌های مشترک با توان بزرگتر رو در عامل‌های غیرمشترک ضرب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 48 = 2^4 \times 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{پایه‌های ۳ و ۲} \\ \text{مشترک‌اند} \end{array} \rightarrow [180, 48] = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$



سوتی‌های کنکوری

توضیحات	سوتی رایج	شکل درست
۱. وقتی مجموع دو عبارت به توان ۲ یا هر عدد دیگری می‌رسند، حاصل را به کمک اتحادها محاسبه می‌کنیم. (با $a^2b^2 = (ab)^2$ فرق دارد)	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
۲. جواب رادیکال با فرجه زوج هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.	$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{-3^2} = -3$ $\sqrt{9} = \pm 3$	$\sqrt{x^2} = x $ تعریف نشده $\sqrt{(-3)^2} = -3 = 3$ $\sqrt{9} = 3$
۳. فقط 2^2 برابر ۴ نمی‌باشد، $(-2)^2$ هم برابر ۴ است.	$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$	$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = \pm 2$
۴. وقتی رادیکال روی مجموع دو یا چند عبارت کشیده می‌شود: (رادیکال نمی‌شکند) (با $\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$ فرق دارد)	$\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B}$
۵. حاصل جمع دو عدد توان‌دار فرمول خاصی ندارد. (با $2^3 \times 2^4 = 2^7$ فرق دارد)	$2^3 + 2^4 = 2^7$	$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$
۶. ضرب دو عدد توان‌دار با پایه و توان‌های متفاوت فرمول خاصی ندارد.	$2^5 \times 3^2 = 6^7$	$2^5 \times 3^2 = 32 \times 9$
۷. وقتی چند عامل در صورت کسر با هم جمع یا از هم کم شده‌اند، نمی‌توان یکی از عامل‌ها را با مخرج ساده کرد.	$\frac{x+5}{x} = 5$	$\frac{x+5}{x} = \frac{x}{x} + \frac{5}{x}$ $= 1 + \frac{5}{x}$
۸. در معادلات، ریشه عاملی که از دو طرف معادله حذف می‌کنیم نیز جواب معادله است.	$x(x+2) = x$ $\Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1$	$x(x+2) = x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$
۹. در نامعادلات اگر علامت عبارت‌ها را ندانیم، حق طرفین وسطین کردن نداریم. بهترین راه این است که همه عوامل را به یک طرف ببریم.	$\frac{x+3}{x-4} < x$ $\Rightarrow x+3 < x(x-4)$	$\frac{x+3}{x-4} < x \Rightarrow \frac{x+3}{x-4} - x < 0$

سوتی های کنکوری

توضیحات	سوتی رایج	شکل درست
۱۰. لگاریتم حاصل ضرب دو عبارت (با توجه به دامنه) برابر است با لگاریتم اولی به علاوه لگاریتم دومی.	$\log(a \times b) = \log a + \log b$ $\log(a \div b) = \log a - \log b$	$\log(a \times b) = \log a + \log b$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
۱۱. حاصل قدر مطلق همواره نامنفی است، نه مثبت.	$ x $ همواره مثبت است.	$ x $ همواره مثبت یا صفر است. (نامنفی)
۱۲. $\tan \frac{\pi}{2}$ هیچ مقداری ندارد و تعریف نشده است. در مبحث حد می گوییم: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ که این (∞) با خود $\tan \frac{\pi}{2}$ فرق دارد.	$\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ $\cot 0 = \infty$ $\tan \frac{3\pi}{2} = \infty$ $\cot \pi = \infty$ $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$	تعریف شده $\tan \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده $\cot 0$ تعریف نشده $\tan \frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده $\cot \pi$ تعریف نشده $\frac{\text{عدد}}{0}$
۱۳. فقط با در نظر گرفتن دامنه حق ساده کردن صورت و مخرج را داریم.	$\frac{x^2}{x} = x$	$\frac{x^2}{x} = x, x \neq 0$
۱۴. در دنباله هندسی با ۳ جمله متوالی a, b, c اگر مقدار a و c را داشته باشیم مقدار دقیق b معلوم نمی شود. (در واقع: $b = +\sqrt{ac}$ یا $b = -\sqrt{ac}$)	a, b, c دنباله ای هندسی $b = \sqrt{ac}$	a, b, c دنباله ای هندسی $b = +\sqrt{ac}$ یا $b = -\sqrt{ac}$
۱۵. عضوهای تکراری در یک مجموعه حساب نمی شوند.	مجموعه $\{2, 2, 5\}$ سه عضو دارد.	مجموعه $\{2, 2, 5\}$ دو عضو دارد.
۱۶. احتمال اجتماع دو پیشامد برابر با مجموع احتمال آن دو پیشامد نیست.	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
۱۷. $-3^2 = -9$ با $(-3)^2 = 9$ فرق داره	$-3^2 = +9$	$-3^2 = -9$



فیلم‌های آموزشی



ششم

فصل

معادله و تابع درجه دوم

ریشه حقیقی معادله زندگی‌ام توایی؛ بیا و
مسئله را حل کن.

نمای کلی فصل

- **درس اول؛ معادله درجه دوم:** حل معادله درجه دوم / روابط بین ریشه‌ها / بررسی علامت و ریشه‌های معادله درجه دوم / تشکیل معادله درجه دوم / مقایسه یک عدد با ریشه‌های معادله درجه دوم / تغییر متغیر / بررسی ریشه‌های $ax^4 + bx^2 + c = 0$ / بررسی ریشه‌های $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ / ریشه مشترک معادله‌ها
- **درس دوم؛ تابع درجه دوم:** رأس و محور تقارن سهمی (نمودار تابع درجه دوم) / صفرهای تابع / سهمی و ناحیه‌های مختصات / علامت‌های a ، b و c از روی نمودار سهمی / وضعیت دو نمودار نسبت به هم

محتوا و جایگاه

- ✓ **شامل:** ریاضی دهم، فصل (۴) درس‌های ۱ و ۲ / ریاضی یازدهم، فصل (۱) درس ۱
- ✓ **پیش‌نیازهای فصل:** فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارات‌های جبری
- ✓ **کاربردهای فصل:** همه فصل‌ها
- ✓ **بودجه‌بندی کنگور:** مستقیم: ۱ تا ۳ تست / غیرمستقیم: ۲ تا ۴ تست

۶

لوح برتر انتخاب برترین‌ها



این درس از نه مبحث «حل معادله درجه دوم»، «روابط بین ریشه‌ها»، «بررسی علامت و ریشه‌های معادله درجه دوم»، «تشکیل معادله درجه دوم»، «مقایسه یک عدد با ریشه‌های معادله درجه دوم»، «تغییر متغیر»، «بررسی ریشه‌های $ax^2 + bx + c = 0$ »، «بررسی ریشه‌های $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ » و «ریشه مشترک معادله‌ها» تشکیل شده است.



حل معادله درجه دوم

درس‌آموز

معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را که $a \neq 0$ باشد را، معادله درجه دوم می‌نامیم.

آه! a صفر بشه معادله همیشه $bx + c = 0$ که درجه اوله نه درجه دوم.

برای تعیین جواب‌های معادله درجه دوم، روش‌های مختلفی وجود دارد که ابتدا حالت‌های خاص را بررسی می‌کنیم.

۱. اگر $b = 0$ باشد، آنگاه معادله به صورت $ax^2 + c = 0$ است که با شرط مختلف‌العلامت بودن a و c ، معادله دارای دو جواب قرینه به صورت $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ می‌باشد و اگر a و c هم‌علامت باشند معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال آموز: معادله $2x^2 + 3 = 0$ دارای ریشه حقیقی نیست ولی معادله $3x^2 - 12 = 0$ دارای دو جواب قرینه $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ است، زیرا:

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

۲. اگر $c = 0$ باشد، آنگاه معادله به صورت $ax^2 + bx = 0$ است که همواره دارای دو جواب $x = 0$ و $x = -\frac{b}{a}$ است.

مثال آموز: معادله $2x^2 - 4x = 0$ دارای دو ریشه $x = 0$ و $x = 2$ است، زیرا:

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

۳. اگر جمع ضرایب صفر شود ($a + b + c = 0$)، آنگاه یکی از ریشه‌ها $x_1 = 1$ و دیگری $x_2 = \frac{c}{a}$ است.

تست آموز: یکی از ریشه‌های $2\sqrt{2}x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2} = 0$ چند برابر یکی از ریشه‌های $-\sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2} + 1 = 0$ می‌تواند باشد؟

$$\begin{array}{llll} \frac{2}{\sqrt{2}+1} & (4) & \frac{\sqrt{2}+1}{2} & (3) & \frac{1}{\sqrt{2}+1} & (2) & \sqrt{2}+1 & (1) \end{array}$$

پاسخ: در معادله $2\sqrt{2}x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2} = 0$ مجموع ضرایب صفر است، پس $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$. در معادله دیگر نیز مجموع ضرایب صفر است و $x'_1 = 1$ و $x'_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}}$ ، بنابراین:

$$\frac{x_2}{x'_2} = \frac{\frac{3+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

گزینه «۳»

۴. اگر ضریب x برابر مجموع دو تا ضریب دیگر باشد ($a + c = b$)، آنگاه یکی از ریشه‌ها $x_1 = -1$ و دیگری $x_2 = -\frac{c}{a}$ است.

تست آموز: اگر یکی از ریشه‌های معادله $(\sqrt{3}+1)x^2 + bx + (1-\sqrt{3}) = 0$ مساوی -1 باشد، آنگاه ریشه دیگر معادله کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 1-\sqrt{3} & (4) & \sqrt{3}-1 & (3) & 2-\sqrt{3} & (2) & \sqrt{3}-2 & (1) \end{array}$$

پاسخ: ریشه دیگر معادله $x_2 = -\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_2 = -\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

گزینه «۲»



۵. تجزیه: اگر ضریب x^2 ، یعنی a برابر ۱ باشد، در صورت امکان دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها b و ضربشان c شود تا معادله به صورت $(x + \dots)(x + \dots) = 0$ نوشته شود.

این مبحث تو فصلای قبلی (اتحاد و تجزیه) مفصل‌تر خوانی!

تست آموز: ریشه بزرگتر معادله $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

پاسخ: چون ضریب x^2 برابر ۱ می‌باشد، پس دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع آن‌ها $\frac{10}{3}$ و حاصل‌ضربشان ۱ شود (معکوس باشند). دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ هستند.

پس: $x = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ریشه بزرگتر}} x_1 = -\frac{1}{3}$ یا $x_2 = -3$ $\Rightarrow (x + \frac{1}{3})(x + 3) = 0$ گزینه «۲»

در مبحث تجزیه گفته شد در صورتی که ضریب $(a)x^2$ ، یک نباشد، چگونه معادله را حل کنیم. جهت یادآوری به مثال زیر توجه کنید.

مثال آموز:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{در } a \text{ ضرب می‌شود}} x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{جمع} = -5} \frac{1}{2}(2x - 1)(2x - 4) = (2x - 1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -\frac{1}{2}$$

ریشه‌های معادله $0 = 3x^2 - 2x - 21$ برابر است با:

$$3x^2 - 2x - 21 = 0 \xrightarrow{\text{در } a \text{ ضرب می‌شود}} x^2 - 2x - 63 = 0 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{جمع} = -2} \frac{1}{3}(3x - 9)(3x + 7)$$

$$\Rightarrow (x - 3)(3x + 7) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -\frac{7}{3}$$

۶. مربع کامل: ضریب ثابت یعنی c را به سمت راست برده و عبارت $ax^2 + bx$ را در سمت چپ نگه می‌داریم و عددی را به دو طرف اضافه می‌کنیم که سمت چپ مربع کامل شود و در نهایت با جذر گرفتن از دو طرف، جواب را به دست می‌آوریم.

اگر a برابر با عدد ۱ باشد یعنی $ax^2 + bx = c$ باشد، به دو طرف معادله $(\frac{b}{2})^2$ یعنی $\frac{b^2}{4}$ اضافه می‌کنیم تا مربع کامل شود.

مثال آموز: ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ برابر با $3 \pm \sqrt{5}$ هستند، زیرا:

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{c را به سمت راست می‌بریم}} x^2 - 6x = -4 \xrightarrow{(-\frac{6}{2})^2} x^2 - 6x + 9 = -4 + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = 5$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}} x - 3 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$$

تست آموز: در حل معادله $x^2 + 8x - 8 = 0$ به روش مربع کامل، به معادله $(x - \frac{m}{n})^2 = 4n$ رسیده‌ایم. مقدار $m + n$ کدام است؟

(۱) -4 (۲) -3 (۳) -2 (۴) -1

پاسخ: معادله را به روش مربع کامل حل می‌کنیم. ابتدا معادله را به صورت $x^2 + 8x = 8$ می‌نویسیم. سپس به دو طرف معادله $(\frac{8}{2})^2 = 16$ را اضافه می‌کنیم.

$$x^2 + 8x = 8 \xrightarrow{+16} x^2 + 8x + 16 = 24 \Rightarrow (x + 4)^2 = 24$$

با مقایسه این رابطه با رابطه بالا، داریم $4n = 24$ پس $n = 6$ و $\frac{-m}{2} = 4$ ، پس $m = -8$ است. در نتیجه $m + n = -8 + 6 = -2$ می‌باشد. گزینه «۳»

۷. روش کلی (دلتا): این روش یک روش عمومی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ است. ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست می آوریم که سه حالت پیش می آید:

(الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه معادله دو ریشه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد.

(ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، آنگاه معادله یک ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ دارد (در واقع دو ریشه برابر با هم دارد).

(پ) اگر $\Delta < 0$ باشد، آنگاه معادله ریشه حقیقی ندارد.

😊 آله روش Δ' رو دیدین تعجب نکنید! فاصله بگم آله b زوج باشد، اونوقت می گیم $b' = \frac{b}{2}$ و $\Delta' = b'^2 - ac$ و $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

مثال آموزه: معادله های زیر را به روش Δ (دلتا) حل می کنیم:

(الف) $-2x^2 - x + 10 = 0$ (ب) $-x^2 + 6x - 9 = 0$ (پ) $x^2 - x + 2 = 0$

پاسخ:

(الف) $a = -2, b = -1, c = 10$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2)(10) = 1 + 80 = 81$

چون $\Delta > 0$ است، پس معادله دو ریشه متمایز دارد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2(-2)} = \frac{1+9}{-4} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2(-2)} = \frac{1-9}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

(ب) $a = -1, b = 6, c = -9$, $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-9) = 36 - 36 = 0$.

چون $\Delta = 0$ است، پس معادله یک ریشه مضاعف دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

روش Δ' : چون b زوج است b' را مساوی $\frac{b}{2}$ یعنی $\frac{6}{2} = 3$ در نظر می گیریم و $\Delta' = b'^2 - ac = 9 - 9 = 0$ و $x = \frac{-b'}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$

(پ) $a = 1, b = -1, c = 2$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7$

چون $\Delta < 0$ است، پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

🔔 معادله درجه دوم حداقل یک ریشه دارد، هرگاه $\Delta \geq 0$ و حداکثر یک ریشه دارد، هرگاه $\Delta \leq 0$.

تست آموزه: در معادله $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 3$ ، حدود m کدام باشد تا معادله حداقل یک ریشه داشته باشد؟

$m \geq 2$ (۴)

$m > 2$ (۳)

$m \leq 2$ (۲)

$m < 2$ (۱)

پاسخ: در صورتی معادله درجه دوم حداقل یک ریشه دارد که $\Delta \geq 0$ باشد، پس در معادله $x^2 - 2(m-1)x + (m^2 - 3) = 0$ داریم:

$$\Delta = (-2(m-1))^2 - 4(1)(m^2 - 3) \geq 0 \Rightarrow 4(m-1)^2 - 4(m^2 - 3) \geq 0 \Rightarrow 4(m^2 - 2m + 1) - 4(m^2 - 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12 \geq 0 \Rightarrow -8m + 16 \geq 0 \Rightarrow m \leq 2 \quad \text{گزینه «۲»}$$

🔔 حتماً به یاد دارید که تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$:

(الف) زمانی همواره مثبت است که $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد.

(ب) زمانی همواره منفی است که $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد.

برای بررسی بیشتر موارد بالا می توانید به فصل تعیین علامت و نامعادله ها رجوع کنید.



روابط بین ریشه‌ها

درس آموز

اگر $\Delta \geq 0$ باشد، معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ است، اگر $\Delta = 0$ باشد، $x_1 = x_2$ است. پس:

$$\text{مجموع دو ریشه} = S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب دو ریشه} = P = x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\text{اختلاف دو ریشه} = D = |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$S = \frac{-b}{a}, P = \frac{c}{a}, D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

پس بطور کلی داریم:

تست آموز: معادله $x^2 - bx + c = 0$ دارای دو ریشه متوالی است، کدام رابطه درست است؟ (S مجموع و P حاصل ضرب ریشه‌ها است)

$$-4P - S^2 = 1 \quad (4)$$

$$4P - S^2 = 1 \quad (3)$$

$$S^2 + 4P = 1 \quad (2)$$

$$S^2 - 4P = 1 \quad (1)$$

پاسخ: معادله دارای دو ریشه متوالی است، پس اختلاف ریشه‌ها برابر یک است.

$$D = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \xrightarrow{a=1} \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{1} = 1 \Rightarrow b^2 - 4c = 1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} S = \frac{-b}{a} \Rightarrow S^2 = \frac{b^2}{a^2} \xrightarrow{a=1} S^2 = b^2 \\ P = \frac{c}{a} \xrightarrow{a=1} P = c \end{cases} \quad (2)$$

از طرفی داریم:

رابطه (1) می‌گوید $b^2 - 4c = 1$ ، با جای‌گذاری روابط (2) در رابطه (1) نتیجه می‌گیریم، $S^2 - 4P = 1$ است. گزینه «1»

دو ریشه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ معکوس هم هستند هرگاه $a = c$ باشد، زیرا:

$$\text{اگر: } x_2 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 \times x_2 = x_1 \times \frac{1}{x_1} = 1 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c$$

توجه داشته باشید که در این حالت باید $\Delta \geq 0$ باشد. ($\Delta > 0$ دو ریشه متمایز و $\Delta = 0$ دو ریشه برابر)

تست آموز: به‌ازای چه مقدار m ، معادله $mx^2 - 3x - 5 = 0$ دارای دو ریشه معکوس و متمایز است؟

$$\text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

$$-6 \quad (3)$$

$$-5 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

پاسخ: اگر دو ریشه معکوس هم باشند حتماً $a = c$ است، یعنی $m = -5$ است. از طرفی معادله باید دارای دو ریشه متمایز باشد، پس باید $\Delta > 0$ باشد.

حال به‌ازای $m = -5$ ، مقدار Δ را بررسی می‌کنیم:

$$m = -5 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(-5)(-5) = 9 - 100 = -91 < 0$$

به‌ازای $m = -5$ ، $\Delta < 0$ است و قابل قبول نیست، پس برای خواسته‌های این سؤال هیچ مقداری برای m وجود ندارد. گزینه «4»

دو ریشه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ قرینه هم هستند هرگاه $b = 0$ باشد، زیرا:

$$b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

توجه داشته باشید که در این حالت باید $\frac{c}{a} \leq 0$ باشد (چون زیر رادیکال باید نامنفی باشد). می‌دانیم هرگاه $\frac{c}{a} \leq 0$ باشد، حتماً $\Delta \geq 0$ می‌باشد.



$$x > [x]$$



$$|x|$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



تست آموز: دو ریشه معادله $\sqrt{3+2\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2} - 1 = 0$:

(۲) قرینه هستند ولی معکوس نیستند.

(۱) قرینه و معکوس هستند.

(۴) نه قرینه و نه معکوس اند.

(۳) قرینه نیستند ولی معکوس هستند.

پاسخ: ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ زیرا: $(\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}+1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

پس در این معادله درجه دو $a = \sqrt{2} + 1$ ، $b = 0$ و $c = -\sqrt{2} - 1$ است، پس داریم:

دو ریشه قرینه اند $\Rightarrow b = 0$

دو ریشه معکوس نیستند $\Rightarrow c \neq a$ از متن تست مشخص است معادله حتماً دو ریشه دارد پس، نیاز به بررسی شرط $\frac{c}{a} \leq 0$ نیست. گزینه «۲»

در ادامه دیگر روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم آورده می‌شود که بدون حل معادله می‌توانیم از آن‌ها استفاده کنیم.

$$۱) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P \quad ۲) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

$$۳) x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 \quad ۴) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P} \quad (P \neq 0)$$

$$۵) \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P} \quad (P \neq 0) \quad ۶) \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} \quad (x_1 \geq x_2 \geq 0)$$

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = PS$$

بقیه روابط را به همین طریق می‌توان به دست آورد، به عنوان نمونه:

$$D = |x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} \quad \text{دقت داشته باشید} \quad D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{و داریم:}$$

تست آموز: در معادله درجه دوم $x^2 + 3x + 1 = 0$ با ریشه‌های $x_1 \neq 0$ و $x_2 \neq 0$ ، اختلاف $B = x_1^2x_2 + x_2^2x_1$ و $A = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: با توجه به $S = \frac{-b}{a} = -3$ و $P = \frac{c}{a} = 1$ داریم:

$$B = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = P(S^2 - 2P) = PS^2 - 2P^2 = (1)(-3)^2 - 2(1)^2 = 9 - 2 = 7$$

از طرفی دیگر داریم $A = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ ، با به توان دو رساندن دو طرف داریم:

$$A^2 = \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2 = \frac{S^2}{P} - 2 + 2 = \frac{S^2}{P} = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow A = \begin{cases} 3 & \text{قق} \\ -3 & \text{غقق} \end{cases}$$

پس $A = 3$ و $B = 7$ است و اختلاف B و A برابر با ۴ است. گزینه «۴»

جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند. پس، علاوه بر روابط بین ریشه‌ها باید به این مورد نیز توجه کرد.

تست آموز: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل $A = \frac{x_1^2 + \frac{1}{x_2}}{(x_1^2 + 6x_1 + 3)(x_2^2 + 6x_2 + 3)}$ کدام است؟

(۴) -۵/۴

(۳) -۴/۶

(۲) ۵/۴

(۱) ۴/۶

پاسخ: x_1 و x_2 در خود معادله صدق می‌کنند پس، $x_1^2 + 5x_1 - 1 = 0$ (یعنی $x_1^2 + 5x_1 = 1$) و $x_2^2 + 5x_2 - 1 = 0$ (یعنی $x_2^2 + 5x_2 = 1$) داریم:

$$A = \frac{x_1^2 + \frac{1}{x_2}}{(x_1^2 + 6x_1 + 3)(x_2^2 + 6x_2 + 3)} = \frac{\textcircled{1} + \textcircled{1}}{(x_1^2 + 5x_1 + x_1 + 3)(x_2^2 + 5x_2 + x_2 + 3)} = \frac{1}{(x_1 + 4)(x_2 + 4)} = \frac{1}{x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 16} = \frac{1}{P + 4S + 16} = \frac{1}{-1 + 4(-5) + 16} = \frac{1}{-1 - 20 + 16} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$



$$\Rightarrow A \text{ مخرج} = (-1) + 4(-5) + 16 = -5$$

$$A \text{ صورت} : x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} = (x_1 - \frac{1}{x_1})^2 + 2 \quad (1)$$

$$x_1^2 + 5x_1 - 1 = 0 \xrightarrow{\div x_1} x_1 + 5 - \frac{1}{x_1} = 0 \Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} = -5 \quad (2)$$

$$A \text{ صورت} = (-5)^2 + 2 = 27$$

$$\text{با جای گذاری } S = \frac{-b}{a} = -5 \text{ و } P = \frac{c}{a} = -1$$

$$\text{طبق اتحاد } a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \text{ داریم:}$$

همچنین داریم:

با جای گذاری رابطه (2) در (1) داریم:

$$\text{پس حاصل } A \text{ برابر با } \frac{27}{-5} \text{ یعنی } -5\frac{4}{5} \text{ است.}$$

گزینه «4»

تست آموز: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - x - 3 = 0$ اعداد x_1 و x_2 باشند، حاصل $A = 3x_1^2 - x_1^3 - x_2$ کدام است؟

7 (4)

6 (3)

5 (2)

4 (1)

پاسخ:

$$x_1^2 - x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 - x_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \times 2 \rightarrow 2x_1^2 - 2x_1 = 6 \\ \times x_1 \rightarrow x_1^3 - x_1^2 = 3x_1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه بالایی}} 2x_1^2 - (-x_1^2) - 2x_1 - x_1^3 = 6 - 3x_1 \Rightarrow 3x_1^2 - x_1^3 = 6 - x_1$$

$$A = \underbrace{3x_1^2 - x_1^3}_{6-x_1} - x_2 = 6 - x_1 - x_2 = 6 - (x_1 + x_2)$$

گزینه «2»

$$\text{می دانیم } 1 = x_1 + x_2 \text{ پس: } A = 6 - 1 = 5$$

تو این تست‌ها باید بازی کردن با ریشه‌ها رو یاد بگیری! آله بیروسی و طوری؟ می‌کم با تمرین زیاده همین!!!

گاهی اوقات روابط بین ریشه‌ها داده می‌شود و باید S و P را در کنار هم قرار دهیم و مسئله را حل کنیم.

تست آموز: اگر یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 + mx + 4 = 0$ دو برابر دیگری باشد، m کدام است؟

هیچ مقدار m (4)

± 6 (3)

فقط -6 (2)

فقط 6 (1)

$$(x_1) \times (x_2) = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{x_2=2x_1} (x_1) \times (2x_1) = 2 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

پاسخ: گزینه «3»

$$x_1 + x_2 = (\pm 1) + (\pm 2) \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } \pm 3 \\ \text{غ ق ق چون ریشه‌ها هم علامت‌اند } \pm 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{m}{2} = \pm 3 \Rightarrow m = \mp 6$$

$$\text{پس } x_2 = \pm 2 \text{ واز } x_1 + x_2 = -\frac{m}{2} \text{ داریم:}$$

$$\text{به طور کلی، در معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{، یک ریشه } n \text{ برابر دیگری است هرگاه } \frac{b^2}{ac} = \frac{(n+1)^2}{n} \text{ باشد.}$$

تست آموز: به ازای چه مقدار از m، یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + m = 0$ ، هشت برابر قرینه ریشه دیگر است؟

2 (4)

1 (3)

-2 (2)

-1 (1)

پاسخ: روش اول: اگر ریشه‌ها را x_1 و $x_2 = -8x_1$ (یکی از ریشه‌ها -8 برابر ریشه دیگر است).

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{7}{4} \xrightarrow{x_2 = -8x_1} x_1 + (-8x_1) = \frac{7}{4} \Rightarrow -7x_1 = \frac{7}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}$$

پس $x_2 = 2$ و داریم:

$$x_1 \times x_2 = \frac{m}{4} \xrightarrow{x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 2} -\frac{1}{4} \times 2 = \frac{m}{4} \Rightarrow m = -2$$

$$x_2 = -8x_1 \Rightarrow n = -8$$

روش دوم: با استفاده از نکته قبلی داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(n+1)^2}{n} \Rightarrow \frac{(-7)^2}{4m} = \frac{(-8+1)^2}{-8} \Rightarrow \frac{49}{4m} = \frac{49}{-8} \Rightarrow 4m = -8 \Rightarrow m = -2$$

گزینه «2»



بررسی علامت و ریشه‌های معادله درجه دوم

درس آموز

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ فرض کنید $\Delta > 0$ باشد، در این صورت معادله دو ریشه دارد که اگر مجموع آن‌ها را با S و حاصل ضرب آن‌ها را با P نشان دهیم، داریم:

۱. اگر $P > 0$ باشد، آنگاه دو ریشه، هم‌علامت هستند (یعنی ضرب دو ریشه در صورتی مثبت است که یا هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند).
۲. اگر $P > 0$ و $S > 0$ باشند، آنگاه دو ریشه، مثبت هستند. (یعنی هر دو ریشه هم‌علامت هستند و از مثبت بودن S نتیجه می‌گیریم که هر دو ریشه مثبت هستند).
۳. اگر $P > 0$ و $S < 0$ باشند، آنگاه دو ریشه، منفی هستند. (یعنی هر دو ریشه هم‌علامت هستند و از منفی بودن S نتیجه می‌گیریم که هر دو ریشه منفی هستند).

هواست باشه برای شرط‌های یک تا سه متماً باید دلتا مثبت باشه!!!

تست آموز: معادله $(m-1)x^2 + \sqrt{8}x + m = 0$ دو ریشه مثبت متمایز دارد. حدود m کدام است؟

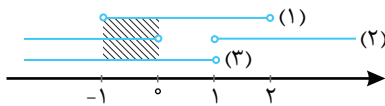
(۱) $-1 < m < 2$ (۲) $-1 < m < 0$ (۳) $0 < m < 1$ (۴) $-2 < m < 0$

پاسخ: باید Δ ، P و S هر سه مثبت باشند. سپس از هر سه شرط اشتراک می‌گیریم:

(۱) $\Delta > 0 \Rightarrow (\sqrt{8})^2 - 4(m-1)(m) > 0 \Rightarrow 8 - 4m^2 + 4m > 0 \xrightarrow{\div(-4)} m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$

(۲) $P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{m-1} > 0 \Rightarrow m < 0$ یا $m > 1$

(۳) $S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-\sqrt{8}}{m-1} > 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$



اشتراک هر سه شرط به صورت $-1 < m < 0$ ، زیرا:

گزینه «۲»

در ادامه ریشه‌ها در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

۴. اگر $P < 0$ باشد، آنگاه معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.

۵. اگر $P < 0$ و $S > 0$ باشند، آنگاه معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد که قدرمطلق ریشه مثبت بزرگتر است (مثل $x_1 = 7$ و $x_2 = -5$ یعنی 7 از 5 بیشتر است).

۶. اگر $P < 0$ و $S < 0$ باشند، آنگاه معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد که قدرمطلق ریشه منفی بزرگتر است (مثل $x_1 = -6$ و $x_2 = 4$ یعنی 6 از 4 بیشتر است).

وقتی P کوچکتر از صفره، رنگه نیاز نیست سراغ دلتا بری، دلتا خودش مثبت میشه!!!

$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -fac > 0 \Rightarrow -fac + b^2 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

تست آموز: به‌ازای چه مقادیر از m ، معادله $3x^2 - 5mx + m^2 - 4 = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد؟

(۱) $m < -2$ (۲) $m > -2$ (۳) $-2 < m < 2$ (۴) $m < -2$ یا $m > 2$

$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4}{3} < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$

پاسخ: کافی است $P < 0$ باشد، یعنی:

دقت داشته باشید که اگر $P < 0$ باشد، آنگاه $\Delta > 0$ است و نیازی به محاسبه علامت Δ نداریم ولی اگر Δ را به‌دست آوریم، داریم:

(به‌ازای هر مقدار m برقرار است.) $\Delta = (-5m)^2 - 4(3)(m^2 - 4) > 0 \Rightarrow 25m^2 - 12m^2 + 48 > 0 \Rightarrow 13m^2 + 48 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}$

پس نیازی نیست که سراغ دلتا برویم! گزینه «۳»



تشکیل معادله درجه دوم

درس آموز

تاکنون معادله درجه دوم را داشتیم و در مورد ریشه‌های آن بحث می‌کردیم، اما حالا ریشه‌ها یا اطلاعاتی از آن را به ما می‌دهند و باید معادله درجه دوم را تشکیل دهیم. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، آنگاه معادله به صورت $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ($a \neq 0$) یا مضربی غیر صفر از $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد که در آن، S مجموع و P حاصل ضرب ریشه‌ها است.

تست آموز: معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $5 - \sqrt{2}$ و $5 + \sqrt{2}$ هستند، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) $2x^2 - 10x + 23 = 0$ (۲) $2x^2 - 20x + 46 = 0$ (۳) $2x^2 - 23x + 10 = 0$ (۴) $2x^2 - 46x + 20 = 0$

پاسخ: ریشه‌های معادله $x_1 = 5 - \sqrt{2}$ و $x_2 = 5 + \sqrt{2}$ هستند، پس:

$$S = x_1 + x_2 = 5 - \sqrt{2} + 5 + \sqrt{2} = 10$$

$$P = (x_1)(x_2) = (5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2}) = 25 - 2 = 23$$

معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ یا مضربی از آن است، پس:

$$x^2 - 10x + 23 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 20x + 46 = 0 \quad \text{گزینه «۲»}$$

اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم، $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد و بخواهیم ضرایب معادله درجه دوم گویا باشند، ریشه دیگر را، $\alpha - \sqrt{\beta}$ در نظر می‌گیریم. و به‌طور کلی اگر یکی از ریشه‌ها $\alpha + m\sqrt{\beta}$ باشد، ریشه دیگر $\alpha - m\sqrt{\beta}$ است.

تست آموز: معادله درجه دومی که یکی از ریشه‌هایش $5 + \sqrt{3}$ باشد، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) $x^2 - 10x + 22 = 0$ (۲) $x^2 - 10x - 22 = 0$ (۳) $x^2 + 10x - 22 = 0$ (۴) $x^2 + 10x + 22 = 0$

پاسخ: ریشه دیگر معادله را $5 - \sqrt{3}$ در نظر می‌گیریم، پس:

$$\begin{cases} S = 5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 10 \\ P = (5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) = 25 - 3 = 22 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = x^2 - 10x + 22 = 0 \quad \text{گزینه «۱»}$$

بعضی مواقع معادله درجه دوم را باید از روی مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها ($S =$ مجموع و $P =$ حاصل ضرب) تشکیل داد تا آن دو عدد (ریشه‌های معادله) مشخص شوند، یعنی آن دو عدد، ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

تست آموز: مجموع دو عدد ۶ و حاصل ضرب آن‌ها ۴ است، اختلاف آن دو عدد کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

پاسخ: اگر دو عدد را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، آنگاه $x_1 + x_2 = 6$ و $x_1 \times x_2 = 4$ می‌باشند، پس با حل معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ ، اعداد مورد نظر به دست می‌آیند.

$$\text{روش اول: } x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(4) = 20 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \quad \text{پس اختلاف آن‌ها یعنی } |x_1 - x_2| \text{ برابر است با:}$$

$$\text{روش دوم: } D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{20}}{1} = 2\sqrt{5} \quad \text{گزینه «۴»}$$

گاهی اوقات معادله درجه دوم را باید با توجه به معادله‌ای دیگر تشکیل دهیم که در این حالت ابتدا S و P معادله داده شده را به دست می‌آوریم، سپس برحسب رابطه‌ای که در مسئله قید شده، S' و P' معادله جدید را با کمک S و P معادله اولیه حساب می‌کنیم و معادله $x^2 - S'x + P' = 0$ ، معادله مطلوب خواهد بود.

😊 به روش دیگه هم داره که تو ادامه می‌بینی، اما این بهتر از اونه!

تست آموز: کدام معادله، ریشه‌هایش از سه برابر ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ ، چهار واحد کمتر هستند؟

(۱) $x^2 + 5x + 5 = 0$ (۲) $x^2 + 5x - 5 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 5 = 0$ (۴) $x^2 - 5x - 5 = 0$

پاسخ: فرض کنید ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ برابر α و β باشد، در این صورت معادله‌ای با ریشه‌های $x_1 = 3\alpha - 4$ و $x_2 = 3\beta - 4$ مطلوب ماست.

ابتدا توجه داشته باشید که $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 1$ و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$ ، پس:

$$S' = x_1 + x_2 = 3\alpha - 4 + 3\beta - 4 = 3\alpha + 3\beta - 8 = 3(\alpha + \beta) - 8 = 3(1) - 8 = -5$$

$$P' = (x_1) \times (x_2) = (3\alpha - 4)(3\beta - 4) = 9\alpha\beta - 12\alpha - 12\beta + 16 = 9\alpha\beta - 12(\alpha + \beta) + 16 = 9(-1) - 12(1) + 16 = -5$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها معادله موردنظر به صورت $x^2 - S'x + P' = x^2 + 5x - 5 = 0$ است. گزینه «۲».

در ادامه یک تست با محاسبات بیشتر را تجربه کنیم.

تست آموز: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، کدام معادله ریشه‌هایش $x_1 = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ و $x_2 = \beta + \frac{1}{\beta}$ است؟

(۱) $x^2 - 2x - 13 = 0$ (۲) $x^2 + 2x - 13 = 0$ (۳) $2x^2 - 2x - 13 = 0$ (۴) $2x^2 + 2x - 13 = 0$

پاسخ: با توجه به $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2$ و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$ ، داریم:

$$S' = x_1 + x_2 = \alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = S + \frac{S}{P} = 2 + \frac{2}{-2} = 1$$

$$P' = (x_1) \times (x_2) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= P + \frac{S^2 - 2P}{P} + \frac{1}{P} = (-2) + \frac{2^2 - 2(-2)}{(-2)} + \frac{1}{(-2)} = -\frac{13}{2}$$

پس معادله جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - x - \frac{13}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 2x - 13 = 0. \quad \text{گزینه «۳»}$$

روش دوم برای حل این گونه مسائل به این صورت است که اگر هر ریشه معادله جدید، برحسب هر ریشه معادله اولیه بیان شود، می‌توان x را برحسب X جدید به دست آورد و در معادله جای گذاری کرد؛ مثلاً:

(الف) اگر ریشه‌ها نصف ریشه‌های معادله اولیه باشند، آنگاه $X = \frac{x}{2}$ است، پس $(x \rightarrow 2X)x = 2X$ را داریم.

(ب) اگر ریشه‌ها دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله اولیه باشند، آنگاه $X = x + 2$ است، پس $(x \rightarrow X - 2)x = X - 2$ را داریم.

تست آموز: کدام معادله ریشه‌هایش، یک واحد کمتر از معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ است؟

(۱) $x^2 + 4x + 2 = 0$ (۲) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (۳) $x^2 + 4x - 2 = 0$ (۴) $x^2 - 4x - 2 = 0$

پاسخ: ریشه‌های معادله جدید یک واحد کمتر از معکوس ریشه‌های معادله اولیه است، پس:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \xrightarrow{\times (X+1)^2} 1 - 2(X+1) - (X+1)^2 = 0.$$

در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1 - 2X - 2 - (X^2 + 2X + 1) = 0 \Rightarrow -X^2 - 4X - 2 = 0 \xrightarrow{\times (-1)} X^2 + 4X + 2 = 0. \quad \text{(گزینه ۱)}$$

در ادامه از روش اول استفاده می‌کنیم. (ببینید روش اول بهتر است یا روش دوم! قضاوت با شما!!)



α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، آنگاه $S = 2$ و $P = -1$ ، پس برای معادله جدید با ریشه‌های $x_1 = \frac{1}{\alpha} - 1$ و $x_2 = \frac{1}{\beta} - 1$ داریم:

$$S' = x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{S}{P} - 2 = \frac{2}{(-1)} - 2 = -4$$

$$P' = (x_1) \times (x_2) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 = \frac{1}{(-1)} - \frac{2}{(-1)} + 1 = 2$$

پس معادله جدید به صورت $x^2 - S'x + P' = x^2 + 4x + 2 = 0$ است. گزینه «۱»

ممکن است در مسائل بخواهند ریشه‌های یکی، برحسب توانی از ریشه‌های دیگر باشد، برای حل این گونه مسائل باید روابط بین ریشه‌ها را به خوبی یاد گرفته باشید.



تست آموز: ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + b = 0$ از مکعب ریشه‌های معادله $x(x-2) = 2$ یک واحد بیشتر است، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱۸ (۲)

۹ (۱)

-۹ (۳)

-۱۸ (۴)

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادله $x(x-2) = 2$ باشند، آنگاه $S = \alpha + \beta = 2$ و $P = \alpha\beta = -2$ ، پس برای معادله با ریشه‌های جدید، یعنی $x_1 = \alpha^3 + 1$ و $x_2 = \beta^3 + 1$ داریم:

$$P' = (x_1) \times (x_2) = (\alpha^3 + 1)(\beta^3 + 1) = \alpha^3\beta^3 + \alpha^3 + \beta^3 + 1 = P^3 + S^3 - 3PS + 1 = (-2)^3 + 2^3 - 3(-2)(2) + 1 = 13$$

$$S' = x_1 + x_2 = \alpha^3 + 1 + \beta^3 + 1 = \alpha^3 + \beta^3 + 2 = S^3 - 3PS + 2 = 2^3 - 3(-2)(2) + 2 = 22$$

پس معادله به صورت $x^2 - S'x + P' = x^2 - 22x + 13 = 0$ یا هر مضرب غیرصفر از آن است که با توجه به صورت سؤال آن را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 - 44x + 26 = 0 \Rightarrow a = -44, b = 26 \Rightarrow a + b = -18 \quad \text{گزینه «۴»}$$

اگر مطالب مربوط به تشکیل معادله درجه دوم را به خوبی یاد گرفته باشید، نکاتی که در ادامه گفته می‌شود، برای شما به راحتی قابل درک خواهند بود.

۱. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است. (تبدیل x به $\frac{1}{x}$) (البته با شرط $c \neq 0$)

۲. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش قرینه ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ است. (تبدیل x به $-x$)

۳. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش n برابر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، به صورت $ax^2 + bnx + cn^2 = 0$ است.

۴. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش m واحد بیشتر (کمتر) از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، با تبدیل x به $x + m$ یا $x - m$ در معادله اولیه به دست می‌آید.



تست آموز: معادله درجه دومی که ریشه‌هایش دو برابر قرینه ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 3 = 0$ باشد، معکوس ریشه‌های

کدام معادله است؟

$-6x^2 + 3x + 1 = 0$ (۴)

$-6x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳)

$x^2 + 3x - 6 = 0$ (۲)

$x^2 - 3x - 6 = 0$ (۱)

پاسخ: معادله درجه دومی که ریشه‌هایش دو برابر قرینه ریشه‌های این معادله باشد (۲- برابر)، برابر است با:

$$ax^2 + bnx + cn^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3(-2)x - 3(-2)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x - 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 3x - 6 = 0$$

اکنون برای به دست آوردن معادله‌ای که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های این معادله باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم.

$$x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow -6x^2 + 3x + 1 = 0$$

توجه داشته باشید که از روش‌های قبلی نیز می‌توان حل کرد ولی با استفاده از نکات بیان شده سریع‌تر حل می‌شود. گزینه «۴»



مقایسهٔ یک عدد با ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

درس آموز

فرض کنید معادلهٔ درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز x_1 و x_2 باشد ($\Delta > 0$)؛ در این صورت:

۱. علامت $f(x)$ به ازای مقادیر بین دو ریشه، مخالف علامت a است، یعنی اگر k عددی بین دو ریشه باشد ($x_1 < k < x_2$)، آنگاه $af(k) < 0$ است و بالعکس.

۲. اگر $af(k) > 0$ باشد، آنگاه k خارج دو ریشه است که دو حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $k + \frac{b}{2a} > 0$ باشد، آنگاه k از هر دو ریشه بزرگتر است. ($x_1 < x_2 < k$)

ب) اگر $k + \frac{b}{2a} < 0$ باشد، آنگاه k از هر دو ریشه کوچکتر است. ($k < x_1 < x_2$)

تست آموز: حدود m کدام باشد، که عدد یک بین دو ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = mx^2 - 2x - 1 = 0$ باشد؟

(۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(-1, 4)$ (۴) $(0, 4)$

پاسخ: باید دو شرط $\Delta > 0$ و $mf(1) < 0$ بررسی شود، پس:

$$1) \Delta = (-2)^2 - 4(m)(-1) = 4 + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -4 \Rightarrow m > -1$$

$$2) mf(1) = m(m-3) < 0 \Rightarrow 0 < m < 3$$

و جواب یعنی اشتراک (۱) و (۲) برابر است با بازهٔ $(0, 3)$. گزینهٔ «۲»

تست آموز: در معادلهٔ $f(x) = -x^2 + bx - 3$ عدد ۴ از بزرگترین ریشهٔ این معادله بزرگتر است. بزرگترین بازه برای b کدام است؟

(۱) $b < 8$ (۲) $b < \frac{19}{4}$ (۳) $\frac{19}{4} < b < 8$ (۴) $b > 8$

پاسخ: با توجه به متن تست معادله دو ریشه دارد. پس $\Delta > 0$ است. اگر عدد k بزرگتر از دو ریشه باشد دو شرط زیر را داریم:

$$1) af(k) > 0 \Rightarrow (-1)f(4) > 0 \Rightarrow f(4) < 0 \Rightarrow -(4)^2 + b(4) - 3 < 0 \Rightarrow 4b - 19 < 0 \Rightarrow b < \frac{19}{4}$$

$$2) k + \frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow 4 + \frac{b}{2(-1)} > 0 \Rightarrow \frac{b}{-2} > -4 \Rightarrow b < 8$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $(1) \cap (2) = b < \frac{19}{4}$ گزینهٔ «۲»



تغییر متغیر

درس آموز

به کمک یک تغییر متغیر مناسب، می‌توان برخی از معادلات را به معادلهٔ درجه دوم تبدیل کرده و سپس حل کرد، مثلاً:

الف) $x^6 - 4x^3 + 2 = 0$ $\xrightarrow{x^3=t} t^2 - 4t + 2 = 0$ ب) $3x^4 - 2x^2 - 7 = 0$ $\xrightarrow{x^2=t} 3t^2 - 2t - 7 = 0$

پ) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$ $\xrightarrow{\sqrt{x}=t} 2t^2 - 3t + 1 = 0$ ت) $3(x^2 + x + 1)^2 - x^2 - x - 5 = 0$ $\xrightarrow{x^2+x+1=t} 3t^2 - t - 4 = 0$

دقت داشته باشید که معادلهٔ قسمت «ت» به صورت $3(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + x + 1) - 4 = 0$ است.

ث) $(x + \frac{1}{x})^2 + \frac{x^2+1}{x} - 3 = 0$ $\xrightarrow{\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = t} t^2 + t - 3 = 0$

ج) $4^x + 2^x - 6 = 0$ $\xrightarrow{2^x=t} t^2 + t - 6 = 0$

دقت داشته باشید که $t^2 = (2^x)^2 = (2^2)^x = 4^x$

چ) $2\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0$ $\xrightarrow{\sin x=t} 2t^2 - 4t - 5 = 0$

دقت داشته باشید که $t^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x$



تست آموز: اختلاف بزرگترین ریشه معادله $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ و ریشه معادله $3x - \sqrt{x} = 2$ کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: هر دو معادله را با استفاده از تغییر متغیر حل می‌کنیم.

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 6t + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 32} t = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

از آنجایی که $t = x^2$ است، پس $x^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$ و $x = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$ بنابراین x و بزرگترین ریشه،

$$3x - \sqrt{x} - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x} = t} 3t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} t_1 = 1, t_2 = -\frac{2}{3}$$

$t_1 = 1, t_2 = \frac{c}{a}$

پس $\sqrt{x} = 1$ یا $\sqrt{x} = -\frac{2}{3}$ و چون $\sqrt{x}$ نمی‌تواند منفی باشد، داریم $x = 1$.

اختلاف $x_{\max} = \sqrt{2} + 1$ و $x = 1$ برابر است با: $|x_{\max} - x| = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$ گزینه «۳»

بعضی مواقع برای پیدا کردن t باید به فورده به فورده زحمت ببری!

تست آموز: اختلاف ریشه‌های معادله $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + \frac{3x+5}{x+2} - 8 = 0$ کدام است؟

$$1/25 \quad (4)$$

$$0/5 \quad (3)$$

$$0/75 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: با استفاده از تغییر متغیر $t = \frac{x+1}{x+2}$ معادله را حل می‌کنیم اما قبل از آن، باید $\frac{3x+5}{x+2}$ برحسب $\frac{x+1}{x+2}$ نوشته شود، پس:

$$\frac{3x+5}{x+2} = \frac{2x+4+x+1}{x+2} = \frac{2x+4}{x+2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{x+1}{x+2} = 2 + t$$

بنابراین معادله به صورت $t^2 + 2 + t - 8 = 0$ است و داریم:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x+2} = 2 \Rightarrow x+1 = 2x+4 \Rightarrow x = -3 \\ \frac{x+1}{x+2} = -3 \Rightarrow x+1 = -3x-6 \Rightarrow x = -\frac{7}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} \left| (-3) - \left(-\frac{7}{4}\right) \right| = \frac{5}{4} = 1/25$$

گزینه «۴»

نکته‌های مربوط به معادله‌های شامل عبارت $x + \frac{1}{x}$ را در معادلات گویا ببینید.



بررسی ریشه‌های $ax^4 + bx^2 + c = 0$

درس آموز

فرض کنیم $c \neq 0$ باشد، ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $x^2 = t$ ، معادله را به صورت $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و دلتا می‌گیریم که سه حالت به وجود می‌آید:

۱. اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد، معادله دو ریشه دارد و $S = \frac{-b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ را می‌یابیم:

الف) اگر $(\Delta > 0)$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد، معادله اصلی (درجه ۴) چهارتا ریشه (برای x) دارد که دوه‌دو قرینه هستند.

ب) اگر $(\Delta > 0)$ و $S < 0$ و $P > 0$ باشد، معادله اصلی هیچ ریشه حقیقی برای x ندارد.

پ) اگر $(P < 0)$ باشد، (خودبه‌خود $\Delta > 0$ می‌شود و نیازی به محاسبه Δ نیست)، معادله اصلی دو ریشه قرینه برای x دارد.

۲. اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد، معادله یک ریشه دارد و S و P را می‌یابیم.

الف) اگر $(\Delta = 0)$ و $S \geq 0$ باشد، معادله اصلی دو ریشه قرینه برای x دارد.

ب) اگر $(\Delta = 0)$ و $S < 0$ باشد، معادله اصلی هیچ ریشه حقیقی برای x ندارد.

۳. اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله هیچ ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه، معادله اصلی هم هیچ ریشه حقیقی برای x ندارد.

دقت داشته باشید که فقط، قسمت الف در حالت (۱) دوطرفه است و اگر بخواهیم عبارت‌ها را به صورت دوطرفه بنویسیم به این صورت هستند:

۱) $(\Delta > 0, S > 0, P > 0) \Leftrightarrow$ چهار ریشه برای معادله درجه ۴

بدون ریشه برای معادله درجه ۴ $\Leftrightarrow (\Delta < 0)$ یا $(\Delta = 0, S < 0)$ یا $(\Delta > 0, S < 0, P > 0)$

۳) فقط دو ریشه قرینه برای معادله درجه ۴ $\Leftrightarrow (\Delta = 0, S \geq 0)$ یا $(P < 0)$



$$x > [x]$$



$$|x|$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$f(x)$$



فرض کنیم $c = 0$ باشد، در این صورت معادله به صورت $ax^2 + bx^2 = 0$ یا $x^2(ax^2 + b) = 0$ می باشد، که حتماً یک ریشه مضاعف صفر داریم (چون $x^2 = 0$ است) و اگر $\frac{-b}{a} \geq 0$ باشد، دو ریشه دیگر هم داریم که قرینه هم هستند و اگر $\frac{-b}{a} < 0$ باشد، ریشه دیگری ندارد.

اگر $c = 0$ باشد، آنگاه معادله به صورت $ax^4 + bx^2 = x^2(ax^2 + b) = 0$ است، پس یا $x^2 = 0$ یا $ax^2 + b = 0$ است که حتماً یک ریشه مضاعف $x = 0$ دارد و بسته به علامت a و b ، ممکن است هیچ ریشه دیگری نداشته باشد، یا دو ریشه قرینه دیگر نیز داشته باشد.

تست آموز: به ازای $k_1 < m < k_2$ ، معادله $2x^4 - 3x^2 + m = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. بیشترین مقدار $k_2 - k_1$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{8}{9}$ (۲)

$\frac{9}{8}$ (۱)

پاسخ: در معادله $2t^2 - 3t + m = 0$ ، باید Δ ، S و P هر سه مثبت باشند، پس:

(۱) $\Delta > 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(2)(m) > 0 \Rightarrow 8m < 9 \Rightarrow m < \frac{9}{8}$

(۲) $S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} > 0$

(۳) $P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0$

بنابراین اشتراک آن‌ها به صورت $0 < m < \frac{9}{8}$ است پس $k_1 = 0$ ، $k_2 = \frac{9}{8}$ و بیشترین مقدار $k_2 - k_1$ برابر $(\frac{9}{8} - 0)$ یعنی $\frac{9}{8}$ است. گزینه «۱»

تست آموز: معادله $mx^4 + 2x^2 - 3 = 0$ فقط دو ریشه قرینه دارد به ازای:

(۴) هر سه مورد می توانند درست باشند.

$m = -\frac{1}{3}$ (۳)

$m > 0$ (۲)

$m = 0$ (۱)

پاسخ: با توجه به درس آموز فوق، معادله درجه ۴ در صورتی فقط دو ریشه قرینه دارد که $(P < 0)$ یا $(S \geq 0)$ و $(\Delta = 0)$ باشد، پس:

گزینه ۲ درست است $P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-3}{m} < 0 \Rightarrow m > 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow 2^2 - 4(m)(-3) = 0 \Rightarrow 4 + 12m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \\ S \geq 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{2}{m} \geq 0 \Rightarrow m \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ گزینه ۳ درست است

و اما در مورد گزینه ۱، فرض کنید $m = 0$ باشد، در این صورت معادله دیگر درجه ۴ نیست و به صورت $2x^2 - 3 = 0$ می باشد که $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ است، یعنی معادله دو ریشه قرینه دارد.

دقت داشته باشید که در این جا a یعنی ضریب x^4 را مساوی صفر قرار داده ایم چون صورت سؤال تأکید نکرده بود که معادله درجه ۴ است. گزینه «۴»

بررسی ریشه‌های $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

درس آموز

ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ ، معادله را به صورت $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و از این معادله دلتا می‌گیریم که سه حالت به وجود می‌آید:

۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه دارد.
- الف) اگر $(\Delta > 0, S > 0, P \geq 0)$ باشد، آنگاه معادله اصلی دو ریشه متمایز برای x دارد.
- ب) اگر $(\Delta > 0, S < 0, P > 0)$ باشد، آنگاه معادله اصلی هیچ ریشه‌ای برای x ندارد.
- پ) اگر $(\Delta > 0, P < 0)$ خودبه‌خود مثبت می‌شود، آنگاه معادله اصلی یک ریشه برای x دارد.
- ت) اگر $(\Delta > 0, P = 0)$ خودبه‌خود نامنفی می‌شود و $S < 0$ باشد، آنگاه معادله اصلی فقط یک ریشه $x = 0$ دارد.
۲. اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله اصلی یک ریشه دارد.
- الف) اگر $\Delta = 0$ و $S > 0$ باشد، آنگاه معادله یک ریشه برای x دارد.
- ب) اگر $\Delta = 0$ و $S < 0$ باشد، آنگاه معادله هیچ ریشه‌ای برای x ندارد.
۳. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله اصلی هیچ ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه معادله هیچ جوابی برای x ندارد.

این مطالب را در ادامه به صورت خلاصه بیان می‌کنیم.

دو ریشه متمایز $(\Delta > 0, S > 0, P \geq 0) \Leftrightarrow$ ۱)

بدون ریشه $(\Delta < 0) \Leftrightarrow$ یا $(\Delta = 0, S < 0)$ یا $(\Delta > 0, S < 0, P > 0)$ ۲)

یک ریشه $(\Delta = 0, S > 0) \Leftrightarrow$ یا $(P < 0)$ یا $(P = 0, S < 0)$ ۳)

یک ریشه $x = 0$

یک ریشه

غیر صفر

یک ریشه مضاعف
غیر صفر

تست آموز: معادله $x + m\sqrt{x} - m = 0$ به ازای $m \in (k_1, +\infty) \cup \{k_2\}$ دارای یک جواب غیر صفر است، حداقل مقدار $k_1 + k_2$ کدام است؟

۲- ۴

۳- ۳

۲- ۴

۱- ۵

پاسخ: دقت کنید که x زیر رادیکال، با فرجه ۲ است و نمی‌تواند منفی باشد. خود سؤال هم گفته جواب صفر نمی‌تواند باشد، پس جواب معادله حتماً مثبت است.

با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ ، معادله به صورت $t^2 + mt - m = 0$ است که باید $P < 0$ باشد یا $(S > 0, \Delta = 0)$ باشد.

$$۱) P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$۲) \begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m(m + 4) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = -4 \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -m > 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m = -4$$

و اجتماع (۱) و (۲) برابر $\{ -4 \} \cup (0, +\infty)$ است که حداقل مقدار $k_1 + k_2$ با $k_1 = 0$ و $k_2 = -4$ برابر -4 می‌باشد. گزینه «۲»



ریشه مشترک معادله‌ها

درس آموز

ریشه مشترک دو معادله $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ است هرگاه $x = \alpha$ ، $f(\alpha) = 0$ و $g(\alpha) = 0$ باشند.

هرگاه دو معادله $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ که هم‌درجه هستند مضربی از همدیگر باشند، تمام ریشه‌های آن‌ها (در صورت وجود) مشترکند. اما اگر دو معادله در تعدادی ریشه، مشترک باشند، آنگاه ریشه‌های مشترک دو معادله، ریشه‌های هر ترکیب خطی از دو معادله $mf(x) + ng(x) = 0$ مثل $(f(x) - g(x) = 0)$ می‌باشند.

بنابراین یک روش در تعیین ریشه یا ریشه‌های مشترک دو معادله آن است که ساده‌ترین ترکیب خطی (مانند جمع یا تفریق) از دو معادله را تشکیل دهیم و ریشه‌های آن را مشخص کنیم، سپس ریشه‌های مشترک دو معادله در بین این ریشه‌ها می‌باشند که با امتحان کردن مشخص می‌شوند. مثلاً اگر دو معادله درجه دوم یک ریشه مشترک داشته باشند، کافی است ترکیب خطی از دو معادله را تشکیل دهیم که از درجه اول باشد، یعنی جمله‌های درجه دوم را حذف می‌کنیم، ریشه به‌دست آمده، ریشه مشترک دو معادله است و چون یک ریشه است، نیازی به امتحان کردن هم ندارد.

تست آموز: معادله‌های $x^3 + 5x^2 + 3x - 4 = 0$ و $x^3 + 2x^2 - 9x - 4 = 0$ چند ریشه مشترک دارند؟



(۴) هیچ ریشه مشترکی ندارند.

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

پاسخ: فرض کنید $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$ و $g(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 4$ باشند، در این صورت با تفریق f و g داریم:

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -4$$

که $x = 0$ ریشه هیچ کدام از معادله‌ها نیست ولی $x = -4$ در هر دو معادله صدق می‌کند و ریشه مشترک آن‌ها می‌باشد. بنابراین یک ریشه مشترک دارند. گزینه «۳»

برای به دست آوردن ریشه مشترک دو معادله درجه دوم (در صورت وجود)، باید x^2 را از دو معادله حذف کنیم.

مثال آموز: دو معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ و $x^2 + x - 6 = 0$ را در نظر بگیرید.



$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{حذف می‌شود } x^2]{\text{بالایی منهای پایینی}} \begin{cases} -5x + 10 = 0 \\ \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

که $x = 2$ در هر دو معادله صدق می‌کند و ریشه مشترک است.

تست آموز: معادله‌های $x^2 - 3x + 4m = 0$ و $x^2 - 2x + m = 0$ به ازای $m \neq 0$ یک ریشه مشترک دارند، این ریشه کدام است؟



(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $-\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{5}{3}$

(۱) $-\frac{5}{3}$

پاسخ: روش اول: دو معادله را از هم کم می‌کنیم، ریشه مشترک برحسب m به دست می‌آید، که با قرار دادن آن در یکی از معادله‌ها، m مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4m = 0 \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \begin{cases} -x + 3m = 0 \\ \end{cases} \Rightarrow x = 3m \quad (\text{ریشه مشترک})$$

اکنون $x = 3m$ را در معادله $x^2 - 2x + m = 0$ قرار می‌دهیم.

$$9m^2 - 6m + m = 0 \Rightarrow 9m^2 - 5m = m(9m - 5) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = \frac{5}{9} \xrightarrow{m \neq 0} m = \frac{5}{9}$$

پس ریشه مشترک برابر با $x = 3m = 3\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{3}$ است.

روش دوم: اگر بتوانیم پارامتر m را بین دو معادله حذف کنیم، ریشه مشترک به دست می‌آید. برای این منظور معادله دوم را در (-4) ضرب کرده و با معادله اول جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4m = 0 \\ -4x^2 + 18x - 4m = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع (+)}} \begin{cases} -3x^2 + 5x = 0 \\ \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{5}{3}$$

چون $m \neq 0$ است، پس $x = 0$ قابل قبول نیست (چون اگر $x = 0$ قرار دهیم، m هم صفر می‌شود)، بنابراین ریشه مشترک $x = \frac{5}{3}$ است که در هر دو معادله صدق می‌کند. گزینه «۲»



سطح یک



۱. ریشه‌های معادله $-2x^2 + x + 3 = 0$ کدام است؟

- (۱) 1 و $\frac{3}{2}$ (۲) -1 و $\frac{3}{2}$ (۳) 1 و $-\frac{3}{2}$ (۴) -1 و $-\frac{3}{2}$

۲. اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^2 + 2ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟

- (۱) a (۲) $2a$ (۳) a^2 (۴) $2a^2$

۳. به ازای چه مقادیری از m معادله $x^2 - 2mx + m = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) فقط $m > 1$ (۲) فقط $m < 0$ (۳) $m > 1$ یا $m < 0$ (۴) $0 < m < 1$

۴. هرگاه به ازای هر مقدار x ، $f(x) = x^2 + 2bx + 1 \geq 0$ باشد، کدام گزینه همواره برقرار است؟

- (۱) $-2 \leq b \leq 2$ (۲) $b \geq 2$ یا $b \leq -2$ (۳) $-1 \leq b \leq 1$ (۴) $b \geq 1$ یا $b \leq -1$

۵. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱) $\{0\} - \frac{2}{5} < m < \frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{1}{2} < m < \frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{1}{2} < m < \frac{2}{5} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (۴) $-1 < m < \frac{2}{5} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

۶. اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $-2 \leq m \leq 1$ (۲) $1 \leq m \leq 2$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $-3 \leq m \leq 2$

(ریاضی ۹۱)

۷. اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) $\emptyset$ (۴) $\mathbb{R}$

(ریاضی خارج ۹۰)

۸. به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $m > \frac{2}{5}$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < \frac{2}{5}$

۹. در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها به ترتیب کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ و $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ و $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{5}{2}$

۱۰. اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + m = 0$ عکس یکدیگر باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۱. اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + mx + 2 = 0$ دو برابر دیگری باشد، m برابر است با:

- (۱) فقط 3 (۲) فقط -3 (۳) ± 3 (۴) صفر

۱۲. در معادله درجه دوم $2x^2 - 5x + m = 0$ ، مجموع مربعات دو ریشه برابر با $\frac{37}{4}$ است. m کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -3 (۳) 2 (۴) 3

۱۳. به ازای کدام مقدار k ، معادله $-3x^2 + (k^2 - 4)x + 3k - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی قرینه دارد؟

- (۱) $k = \frac{1}{3}$ (۲) $k = 2$ و $k = -2$ (۳) $k = 2$ (۴) $k = -2$

۱۴. اگر معادله درجه دوم $x^2 - 4x + k = 0$ دارای دو ریشه x' و x'' باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $x'x'' > 4$ (۲) $x'x'' \geq 4$ (۳) $x'x'' < -4$ (۴) $x'x'' \leq 4$

۱۵. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

۱۶. در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

(۱) $\frac{59}{5}$ (۲) $\frac{63}{5}$ (۳) $\frac{59}{4}$ (۴) $\frac{63}{4}$

۱۷. به ازای چه مقدار m ، بین ریشه‌های معادله $x^2 - 5mx + 16 = 0$ ، رابطه $x_1 = x_2 > 0$ برقرار است؟

(۱) $m = 2$ و $m = -2$ (۲) $m = -2$ (۳) $m = 2$ (۴) $m = 8$

۱۸. در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ ، یک ریشه از نصف ریشه دیگر، ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۱۹. حدود m برای آنکه معادله درجه دوم $x^2 - x + m = 0$ دارای دو ریشه مثبت باشد، کدام است؟

(۱) $m < \frac{1}{4}$ (۲) $0 < m < \frac{1}{4}$ (۳) $m > 0$ (۴) $m > \frac{1}{4}$ یا $m < 0$

۲۰. حدود m برای آنکه معادله $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ ، دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد، کدام است؟

(۱) $m > 2$ (۲) $1 < m < 3$ (۳) $m < 1$ (۴) $0 < m < 1$

۲۱. اگر معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد، کدام یک از معادلات زیر همواره دو ریشه حقیقی دارد؟

(۱) $x^2 + ax + b^2 = 0$ (۲) $x^2 - ax - b = 0$ (۳) $-x^2 - ax - b - 1 = 0$ (۴) $-bx^2 + ax + b - 1 = 0$

۲۲. معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ باشد، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 + 3x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 3x - 1 = 0$

۲۳. معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 - 4x + a = 0$ (۲) $x^2 + ax - 4 = 0$ (۳) $x^2 + 4x - a = 0$ (۴) $x^2 - ax + 4 = 0$

سطح دو

۲۴. معادله درجه دومی با ضرایب صحیح که یکی از ریشه‌های آن $3 + 2\sqrt{5}$ است، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) $3x^2 - 6x - 11 = 0$ (۲) $x^2 - 6x - 11 = 0$ (۳) $x^2 + 6x - 11 = 0$ (۴) $3x^2 + 6x + 11 = 0$

۲۵. اگر مجموع دو عدد $1/5$ و حاصل ضربشان -7 باشد، عدد بزرگتر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) $2/5$

۲۶. اختلاف ابعاد مستطیلی با محیط 11cm و مساحت 6cm^2 کدام است؟

(۱) $1/5$ (۲) $2/5$ (۳) $3/5$ (۴) $4/5$

۲۷. عدد ۲۴ را به گونه‌ای به دو قسمت تقسیم کرده‌ایم که حاصل ضربشان ۱۴۳ شده است. اختلاف این دو عدد کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸. اگر ریشه‌های معادله $x^2 + ax - a^2 = 0$ برابر با x_1 و x_2 باشند، ریشه‌های کدام معادله برابر با $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ است؟

(۱) $x^2 + (a-2)x + a^2 + a - 1 = 0$ (۲) $x^2 + (a+2)x - a^2 - a + 1 = 0$

(۳) $x^2 + (a-2)x - a^2 - a + 1 = 0$ (۴) $x^2 + (a+2)x + a^2 + a - 1 = 0$

۲۹. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش از ریشه‌های معادله $x^2 + x - 1 = 0$ ، دو واحد کمتر باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + 5x + 5 = 0$ (۲) $x^2 + 5x - 5 = 0$ (۳) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۴) $x^2 + 3x - 1 = 0$

۳۰. معادله $(x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) + 3 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۱. معادله $(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + x^2 + \sqrt{x} - 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۲. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 5(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) معادله فاقد ریشه است.



۳۳. اختلاف ریشه بزرگتر و مکعب ریشه کوچکتر معادله $4x^6 + 1 = 5x^3$ کدام است؟

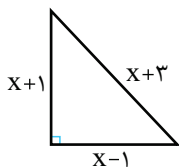
- (۱) $0/25$ (۲) $0/5$ (۳) $0/75$ (۴) 1

۳۴. در مورد معادله $x^6 + 4x^2 + 4 = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) یک ریشه مضاعف دارد. (۲) دو ریشه قرینه هم دارد. (۳) ریشه ندارد. (۴) دو ریشه مثبت دارد.

۳۵. ریشه کدام معادله است؟ $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

- (۱) $x^4 - 22x^2 + 20 = 0$ (۲) $x^4 - 20x^2 + 20 = 0$ (۳) $x^4 - 22x^2 + 25 = 0$ (۴) $x^4 - 20x^2 + 25 = 0$



۳۶. در شکل روبه‌رو، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) 18 (۲) 24 (۳) 36 (۴) 48

۳۷. به‌ازای چند مقدار برای m ، عبارت درجه دوم $mx^2 - 3mx + m + 6$ به‌صورت مربع کامل است؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

۳۸. معادله $(m^2 - 4m)x^2 + (m^2 - 16)x + (m + 4) = 0$ ریشه مضاعف صفر دارد. m کدام است؟

- (۱) 4 و 0 (۲) 4 و -4 (۳) فقط 4 (۴) فقط -4

۳۹. معادله $(x-2)(x^2 + mx + 4) = 0$ تنها یک جواب دارد. محدوده m کدام است؟

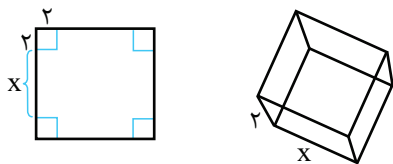
- (۱) $-4 < m < 4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 \leq m < 4$ (۴) $m \leq 4$

۴۰. با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک و هم‌اندازه در گوشه‌های آن جدا می‌کنیم.

بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر ضلع مربع‌های جدا شده 2 سانتی‌متر باشد و بخواهیم حجم این جعبه، 200 سانتی‌متر مکعب

باشد، طول اضلاع مقوایی که باید برای این کار انتخاب شود، کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 10 (۳) 12 (۴) 14



۴۱. مجموع پول علی و اکرم 100 تومان است. اگر علی 10 تومان از پولش را به اکرم بدهد، آنگاه حاصل ضرب پول‌های باقیمانده آن 475 تومان

خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 15 (۳) 85 (۴) 91

۴۲. فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟ (تجربی 1400)

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

۴۳. به‌ازای کدام مقدار m ، مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر 4 است؟

- (۱) 2 و -6 (۲) -2 (۳) -2 و 6 (۴) 6

۴۴. اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 + 12x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + 3\alpha)^5 + (\beta^2 + 3\beta)^5$ کدام است؟

- (۱) 2^9 (۲) $(\frac{1}{2})^9$ (۳) $(\frac{1}{2})^{10}$ (۴) 2^{10}

۴۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 4 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) 2 (۴) $\sqrt{5}$

۴۶. در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ ، یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر، 3 واحد بیشتر است، m کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 10 (۳) 12 (۴) 15

۴۷. به‌ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر با 2 می‌باشد؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۴۸. در معادله $x^2 + mx + 12 = 0$ ، اگر $\alpha^2 + \beta^2 = 25$ باشند (α و β ریشه‌های معادله هستند)، حاصل ضرب ریشه‌های معادله $mx^2 + x - 2 = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $-\frac{2}{7}$ (۳) $\pm \frac{2}{7}$ (۴) $\pm \frac{2}{5}$

۴۹. به ازای چه مقدار از m ، معادله $4x^2 + (m^2 - 1)x + 1 = 0$ دو ریشه قرینه دارد؟

(۱) فقط $m = 1$ (۲) فقط $m = -1$ (۳) $m = \pm 1$ (۴) هیچ مقدار m

۵۰. به ازای کدام مقدار m ، $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + mx + (1 - m^2) = 0$ هستند؟ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$)

(۱) $m = -2$ (۲) $m = 2$ (۳) هیچ مقدار m (۴) $m < 1$

۵۱. به ازای کدام مقدار m ، عدد $\frac{1}{8}$ واسطه حسابی دو ریشه معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

۵۲. معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

(۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$ (۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

۵۳. به ازای کدام مقادیر برای m ، معادله درجه دوم $(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

سطح سه



۵۴. کدام یک از معادلات زیر، به ازای جميع مقادیر k ، دو ریشه حقیقی منفی دارد؟

(۱) $x^2 + kx + k^2 + 1 = 0$ (۲) $x^2 + (k+1)x + k - 2 = 0$

(۳) $x^2 - (k^2 + 1)x + k^2 = 0$ (۴) $x^2 + (k^2 + 3)x + k^2 + 2 = 0$

۵۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت

(ریاضی ۹۰) $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۵۶. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۵۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

(۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۵۸. اگر ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشند، a کدام است؟

(۱) -۱۴ (۲) -۱۲ (۳) -۸ (۴) -۶

۵۹. ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۶۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت

(ریاضی خارج ۹۰) $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۶۱. به ازای کدام مقدار m ، هریک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$

می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۶)

(۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵



۶۲. در معادله $2x^2 + mx - 3 = 0$ ، عدد $\frac{3}{4}$ بین ریشه‌های معادله قرار دارد. حدود m کدام است؟

$$(1) \quad 0 < m < \frac{5}{2} \quad (2) \quad m < \frac{5}{2} \quad (3) \quad m > 0 \quad (4) \quad -\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$$

(تجربی ۹۰)

۶۳. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

$$(1) \quad -4 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 4$$

۶۴. اگر $a > 0$ و دو معادله $x^2 + 2x + a = 0$ و $x^2 - x - 2a = 0$ دارای یک ریشه مشترک باشند، این ریشه مشترک کدام است؟

$$(1) \quad -2 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad 2$$

۶۵. اگر ریشه مشترک $f(x) = x^3 + kx^2 + m$ و $g(x) = x^2 + nx - 1$ برابر ۱ باشد، $m + k + n$ کدام است؟

$$(1) \quad -1 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad 2$$

۶۶. دو معادله $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ و $x^2 + b_2x + c_2 = 0$ مفروض‌اند. اگر $b_1b_2 = 2(c_1 + c_2)$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) هر دو معادله همواره ریشه مضاعف دارند. (۲) هر دو معادله همواره دو ریشه دارند.
(۳) حداقل یکی از دو معادله همواره ریشه دارد. (۴) ممکن است یکی از آن‌ها دارای ریشه باشد.

۶۷. به‌ازای چند مقدار برای a ، نمودار $y = (x^2 + ax + 3)(x^2 - 1)$ در یک نقطه بر محور x ها مماس است؟

$$(1) \quad \text{یک مقدار} \quad (2) \quad \text{دو مقدار} \quad (3) \quad \text{سه مقدار} \quad (4) \quad \text{چهار مقدار}$$

۶۸. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x = x^2 - 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x^3$ ، است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

$$(1) \quad 4x^2 = 51x + 221 \quad (2) \quad 4x + 51x = 221 \quad (3) \quad 4x^2 = 51x + 197 \quad (4) \quad 4x + 51x = 197$$

۶۹. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = x^2 - 5$ باشند. $\frac{1}{(x_1 + 1)^3} + \frac{1}{(x_2 + 1)^3}$ ، ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (تجربی ۱۴۰۰)

$$(1) \quad 125x^2 + 16x = 1 \quad (2) \quad 125x^2 = 16x + 1 \quad (3) \quad 125x^2 = 12x + 1 \quad (4) \quad 125x^2 + 12x = 1$$

۷۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\beta^{1397}}{(\alpha - 3)^{1398}} + \frac{\alpha^{1396}}{(3 - \beta)^{1397}}$ کدام گزینه است؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad -\frac{3}{2} \quad (4) \quad \frac{2}{3}$$

۷۱. معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (تجربی ۹۹)

$$(1) \quad \frac{7}{2} \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad -\frac{5}{2}$$

۷۲. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند و داشته باشیم، $k = \alpha^3 + \beta^4 + \alpha^2(\Delta\alpha + 2) + \beta(\Delta\beta + 2)$ ، مقدار k کدام است؟

$$(1) \quad 983 \quad (2) \quad 984 \quad (3) \quad 988 \quad (4) \quad 990$$

۷۳. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

$$(1) \quad -\frac{3}{2} < m < 2 \quad (2) \quad 0 < m < 2 \quad (3) \quad \frac{3}{2} < m < \frac{5}{2} \quad (4) \quad \frac{3}{2} < m < 2$$

۷۴. معادلات $x^3 + 7x + 1 = 0$ و $x^4 + x^2 - 1 = 0$ چند ریشه مشترک دارند؟

$$(1) \quad \text{یک ریشه} \quad (2) \quad \text{دو ریشه} \quad (3) \quad \text{سه ریشه} \quad (4) \quad \text{ریشه مشترک ندارند.}$$

این درس از پنج مبحث «رأس و محور تقارن سهمی»، «صفحه‌های تابع»، «سهمی و ناحیه‌های مختصات»، «علامت‌های a ، b و c از روی نمودار سهمی» و «وضعیت دو نمودار نسبت به هم» تشکیل شده است.

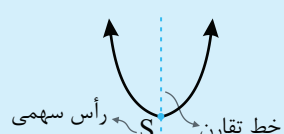


رأس و محور تقارن سهمی (نمودار تابع درجه دوم)

درس آموز

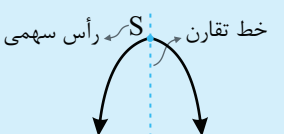
یک تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) و به نمودار آن سهمی می‌گوییم که در حالت کلی به یکی از دو صورت زیر است:

۱. اگر $a > 0$ باشد:



خط تقارن رأس سهمی

۲. اگر $a < 0$:



خط تقارن رأس سهمی

به نقطه S در این شکل‌ها، رأس سهمی می‌گوییم و مختصات آن برابر با $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است. همچنین، خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود و ضابطه آن به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد.

عرض رأس سهمی، یعنی $\frac{-\Delta}{4a}$ همان $f(\frac{-b}{2a})$ است که در حالت $a > 0$ ، کمترین مقدار تابع (مینیمم) و در حالت $a < 0$ ، بیشترین مقدار تابع (ماکزیمم) است.

تست آموز: بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ کدام است؟

۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۱) ۴ (۲)

پاسخ: روش اول: بیشترین مقدار تابع درجه دو $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است، پس:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(3) - (-2)^2}{4(-1)} = \frac{-16}{-4} = 4$$

روش دوم: ابتدا $x_S = \frac{-b}{2a}$ را به دست آورده و سپس $f(\frac{-b}{2a})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \Rightarrow y_S = f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = 4 \quad \text{گزینه «۱»}$$

ضابطه خط افقی مماس بر سهمی (که حتماً با رأس سهمی برخورد دارد) به صورت $y = y_S$ است و ضابطه خط عمود بر سهمی که از رأس می‌گذرد به صورت $x = x_S$ است.



تست آموز: خط $y = -2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 - 2x + m$ در رأس سهمی مماس است. اختلاف m و طول رأس سهمی کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: مقدار y همان y_S است، پس:

$$y = y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(m) - (-2)^2}{4(-1)} = \frac{-4m - 4}{-4}$$

بنابراین $-4m - 4 = 8 \Rightarrow -4m = 12 \Rightarrow m = -3$ در نتیجه $m = -3$ است.

اکنون طول رأس سهمی را از رابطه $x = x_S$ به دست می‌آوریم:

$$x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1$$

و اختلاف (-3) و (-1) برابر با 2 است. $|-1 - (-3)| = 2$ گزینه «۲»



هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات $S(h, k)$ و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

مثال آموز: خط تقارن و رأس سهمی $y = -2(x+1)^2 + 3$ به ترتیب برابر با $x = -1$ و $S(-1, 3)$ است. دقت داشته باشید که $h = -1$ است، زیرا $y = -2(x - (-1))^2 + 3$

اگر دو نقطه از سهمی دارای y برابر باشند، آنگاه طول رأس سهمی (x_S) برابر با میانگین x های آن دو نقطه است.

$$A(x_A, y) \quad B(x_B, y) \Rightarrow x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

تست آموز: سهمی $f(x) = 2(x-2)(x+1) + mx + n$ دارای رأس $S(1, -5)$ است. اگر این سهمی از نقاط $(\alpha, 4)$ و $(\beta, 4)$ بگذرد، مقدار $f(\alpha + \beta)$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۱

(۲) -۲

(۱) ۲

پاسخ: ابتدا ضابطه سهمی را مرتب می کنیم:

$$f(x) = 2(x^2 + x - 2x - 2) + mx + n = 2x^2 - 2x - 4 + mx + n = 2x^2 + (m-2)x + n - 4$$

$$x_S = 1 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{-(m-2)}{2(2)} = 1 \Rightarrow -(m-2) = 4 \Rightarrow m-2 = -4 \Rightarrow m = -2$$

پس $f(x) = 2x^2 - 4x + n - 4$ است و از $S(1, -5)$ می گذرد، یعنی $f(1) = -5$ است، پس داریم:

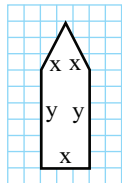
$$f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + n - 4 = -5 \Rightarrow n - 6 = -5 \Rightarrow n = 1$$

بنابراین $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$ می باشد و با استفاده از نکته قبلی می دانیم $x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1$ ، پس $\alpha + \beta = 2$ و در نتیجه $\alpha + \beta = 2$ است:

$$f(\alpha + \beta) = f(2) = 2(2)^2 - 4(2) - 3 = -3 \quad \text{گزینه «۴»}$$

در بعضی از مسائل، بیشترین یا کمترین مقدار را می خواهند که باید ابتدا مسئله را مدل سازی کرد و سپس مقدار خواسته شده، یعنی y_S را بیابیم.

تست آموز: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $12 - 2\sqrt{3}$ متر باشد، در شکل روبه رو، مقدار y چند متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟



(۲) $3 - \sqrt{3}$

(۱) $6 - \sqrt{3}$

(۴) $2 - \sqrt{2}$

(۳) $4 - \sqrt{2}$

پاسخ: با توجه به شکل داریم:

$$12 - 2\sqrt{3} = 3x + 2y \Rightarrow 3x + 2y = 12 - 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 6 - \sqrt{3} - \frac{3}{2}x \quad (1)$$

از طرفی دیگر می دانیم مساحت مثلث متساوی الاضلاع بر حسب ضلع x برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است، پس:

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow \text{مساحت پنجره} = \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مثلث}$$

به جای y ، معادل آن را بر حسب x قرار می دهیم.

$$S = x(6 - \sqrt{3} - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (6 - \sqrt{3})x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

بنابراین $S = (\frac{\sqrt{3}-6}{4})x^2 + (6 - \sqrt{3})x$ می باشد که این تابع دارای ماکزیمم می باشد، زیرا $a < 0$ است و بیشترین مقدار آن بازای $x_S = \frac{-b}{2a}$ حاصل می شود.

$$x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6 - \sqrt{3})}{2(\frac{\sqrt{3}-6}{4})} = \frac{\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}-6} = 2m \xrightarrow{\text{از رابطه (۱)}} y_S = y = 6 - \sqrt{3} - \frac{3}{2}(2) = 3 - \sqrt{3} \quad \text{گزینه «۲»}$$



$$x > [x]$$



$$|x|$$



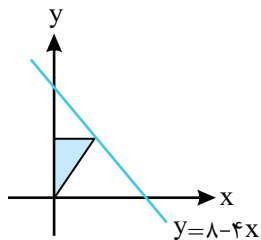
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



هالا از پنجره بیرون ببایم، بریم سمت مثلث قائم الزاویه !!!



تست آموز: بیشترین مقدار مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مطابق شکل، یک رأس آن روی خط $y = 8 - 4x$ و یک رأس آن در مبدأ مختصات و رأس دیگر روی محور عرض‌ها قرار دارد، چقدر است؟



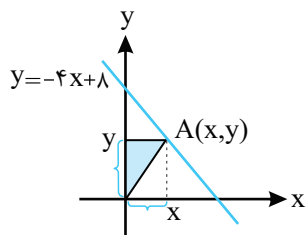
۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: مساحت مثلث به صورت $S = \frac{1}{2}xy$ است که با جای‌گذاری $-4x + 8$ به جای y داریم:



$$S = \frac{1}{2}x(-4x + 8) = -2x^2 + 4x$$

گزینه «۲»

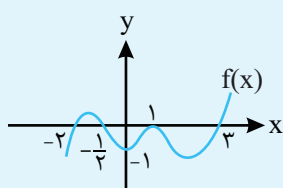
بیشترین مقدار S به‌ازای $x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$ به‌دست می‌آید، پس: $S_{\max} = -2(1)^2 + 4(1) = 2$



صفرهای تابع

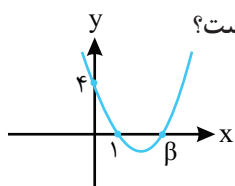
درس آموز

طول نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند $f(x)$ با محور x ‌ها را، صفرهای آن تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های $f(x)$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است (یعنی $y = 0$). همچنین، عرض نقطه برخورد نمودار هر تابع مثل $f(x)$ با محور y ‌ها، همان $f(0)$ است (یعنی $x = 0$).



مثال آموز: صفرهای تابع $f(x)$ اعداد -2 ، $-\frac{1}{3}$ ، و 3 هستند. همچنین عرض نقطه برخورد نمودار با محور y ، برابر -1 است، یعنی $f(0) = -1$.

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، آنگاه تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ نشان داد.



تست آموز: نمودار تابع $f(x) = 2x^2 + bx + c$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. طول رأس سهمی کدام است؟

۲ (۲)

۲/۵ (۱)

۱ (۴)

۱/۵ (۳)

پاسخ: با توجه به اینکه $x_1 = 1$ و $x_2 = \beta$ صفرهای تابع f هستند، پس: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow f(x) = 2(x - 1)(x - \beta)$

از طرفی دیگر نمودار تابع از نقطه $(0, 4)$ می‌گذرد، پس $f(0) = 4$ ، بنابراین:

$$2(0 - 1)(0 - \beta) = 4 \Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$$

دو نقطه با طول‌های $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ دارای y برابر هستند که x_S برابر میانگین x ‌های این دو نقطه است، در نتیجه:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

گزینه «۳»

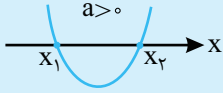


نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نسبت به محور x ها سه حالت دارد:

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و معادله سهمی را می‌توان به صورت

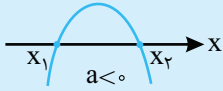
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

نوشت که x_1 و x_2 همان ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند.



۱. سهمی، محور x ها را در دو نقطه سمت راست مبدأ قطع می‌کند $\Leftrightarrow P > 0$ ، $S > 0$ و $\Delta > 0$

۲. سهمی، محور x ها را در دو نقطه سمت چپ مبدأ قطع می‌کند $\Leftrightarrow P > 0$ ، $S < 0$ و $\Delta > 0$

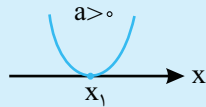
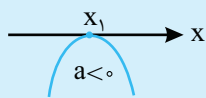


۳. سهمی، محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند $\Leftrightarrow P < 0$ (شرط $\Delta > 0$ خودبه‌خود برقرار می‌شود).

۴. از قبل می‌دانیم که $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $P = (x_1) \times (x_2) = \frac{c}{a}$

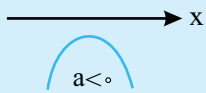
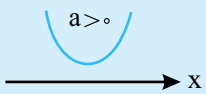
حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی بر محور x ها مماس است. اگر طول نقطه تماس را $x = x_1$ بنامیم، معادله سهمی به صورت

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \text{ می‌باشد.}$$



۱. x_1 همان x_S یعنی $-\frac{b}{2a}$ است.

۲. عرض سهمی برابر صفر است. ($y = 0$)



حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند.

تست آموز: به ازای چند مقدار طبیعی برای m ، سهمی به معادله $y = x^2 - mx + m - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه سمت راست مبدأ قطع نمی‌کند؟

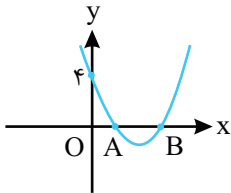
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

پاسخ: ابتدا m هایی را می‌یابیم که به ازای آن‌ها سهمی، محور x ها را در دو نقطه سمت راست مبدأ قطع می‌کند، پس باید $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\begin{cases} \Delta = (-m)^2 - 4(1)(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2 \\ S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{1} > 0 \Rightarrow m > 0 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} (1, +\infty) - \{2\}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $m_1 = 1$ و $m_2 = 2$ برقرار نیست. گزینه «۲»

تست آموز: نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + bx + c$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر $AB = 3OA$ باشد، مقدار b کدام است؟



- | | |
|-------|--------|
| ۵ (۲) | -۵ (۱) |
| ۱ (۴) | -۱ (۳) |

پاسخ: نقطه $(0, 4)$ روی نمودار است، یعنی $f(0) = 4$ ، پس $c = 4$ و تابع به صورت $f(x) = x^2 + bx + 4$ است. اگر طول نقاط A و B را به ترتیب

$$AB = 3OA \Rightarrow x_2 - x_1 = 3x_1 \Rightarrow x_2 = 4x_1$$

x_1 و x_2 در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$P = (x_1) \times (x_2) = \frac{c}{a} = 4 \xrightarrow{x_2 = 4x_1} x_1 \times 4x_1 = 4 \Rightarrow 4x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1^2 = 1 \xrightarrow{x_1 > 0} x_1 = 1$$

از طرفی دیگر داریم:

بنابراین $x_2 = 4$ است. از طریق فرمول مجموع دو ریشه می‌توان b را به دست آورد.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 + 4 = -\frac{b}{1} \Rightarrow b = -5$$

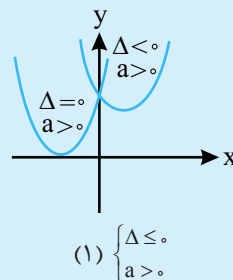
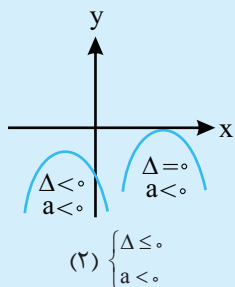
گزینه «۱»



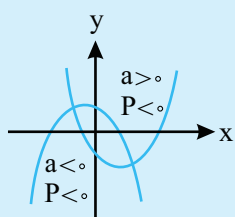
سهمی و ناحیه های مختصات

درس آموز

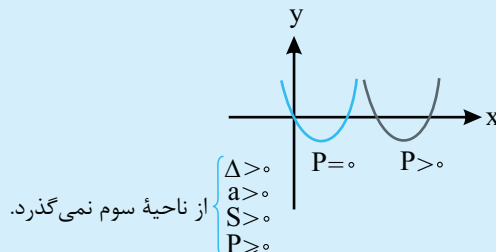
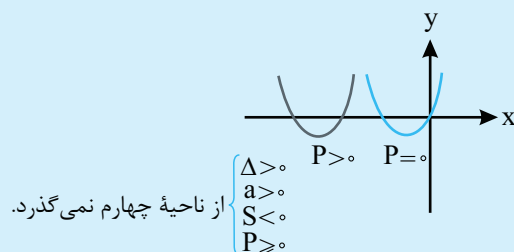
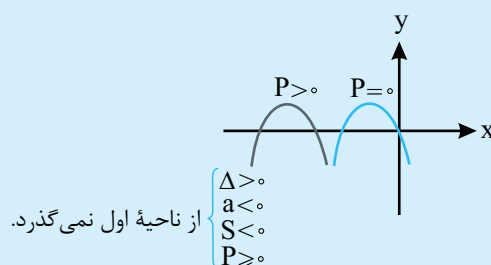
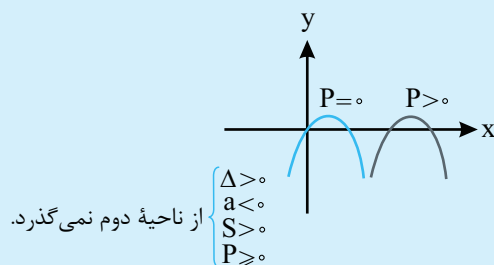
در ادامه بررسی خواهیم کرد که با چه شرایطی، یک سهمی از نواحی خاصی (یک تا چهار که حداقل باید از دو ناحیه عبور کند) می گذرد.
۱. اگر سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند یکی از حالت های زیر پیش می آید.



۲. اگر $P = \frac{c}{a} < 0$ باشد (دو ریشه مختلف علامت دارد)، آنگاه سهمی از هر چهار ناحیه عبور می کند.



۳. برای اینکه سهمی فقط از سه ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند)، سهمی های مختلفی می توان رسم کرد که در این حالت ها، سهمی حتماً دو ریشه هم علامت دارد یا یکی از ریشه ها صفر است.



تست آموز: اگر سهمی با ضابطه $y = (m + 3)x^2 - mx + 1$ فقط از ناحیه سوم عبور نکند، حدود m کدام است؟

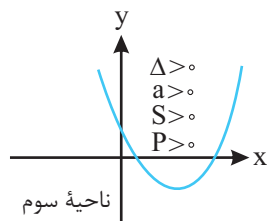
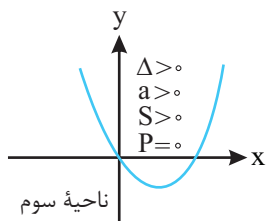
$m > 6$ (۴)

$m > 0$ (۳)

$m < -3$ (۲)

$m < -2$ (۱)

پاسخ: سهمی ای که از ناحیه سوم عبور نمی کند می تواند به شکل های زیر باشد:



پس باید شرط های $\Delta > 0$ ، $a > 0$ ، $S > 0$ و $P \geq 0$ برقرار باشند.



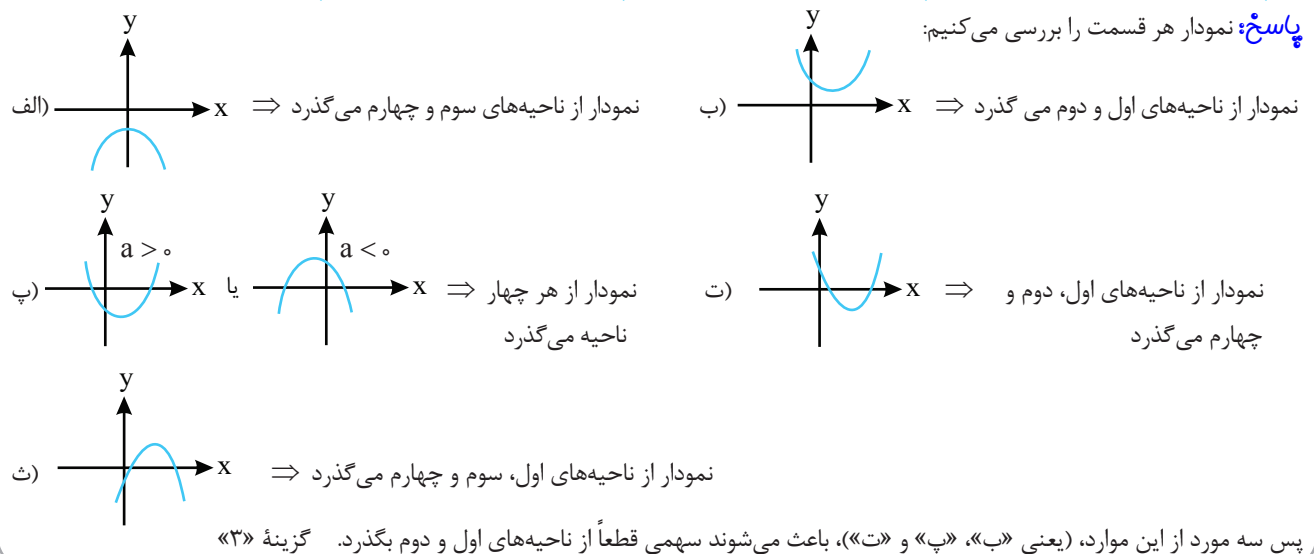


$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \Delta > 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(m+3)(1) = m^2 - 4m - 12 = (m+2)(m-6) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -2 \text{ یا } m > 6 \\ (2) a > 0 \Rightarrow m+3 > 0 \Rightarrow m > -3 \\ (3) S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{m}{m+3} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -3 \text{ یا } m > 0 \\ (4) P \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{m+3} \geq 0 \Rightarrow m > -3 \end{array} \right.$$

اشتراک این چهار شرط به صورت $m > 6$ است. گزینه «۴»

تست آموز: چند مورد از موارد زیر، مربوط به سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ است که قطعاً از ناحیه اول و دوم می‌گذرد؟

الف) $a < 0, \Delta < 0$ (ب) $a > 0, \Delta < 0$ (پ) $P < 0$ (ت) $P > 0, S > 0, a > 0, \Delta > 0$ (ث) $P > 0, S > 0, a < 0, \Delta > 0$



پس سه مورد از این موارد، (یعنی «ب»، «پ» و «ت»)، باعث می‌شوند سهمی قطعاً از ناحیه‌های اول و دوم بگذرد. گزینه «۳»



علامت‌های a ، b و c از روی نمودار سهمی

درس آموز

در ادامه در مورد علامت‌های a ، b و c از روی نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ بحث خواهیم کرد که در چه حالتی مثبت، منفی یا صفر هستند. در این‌گونه موارد، ابتدا علامت a ، سپس c و در پایان علامت b را مشخص می‌کنیم.

۱. اگر سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر سهمی رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

۲. c ، همان محل برخورد سهمی با محور y را نشان می‌دهد. پس اگر سهمی، محور y را در بالای مبدأ قطع کند، $c > 0$ و اگر محور y را در پایین مبدأ قطع کند، $c < 0$ می‌باشد و واضح است که اگر سهمی، محور y را در مبدأ قطع کند، $c = 0$ است.

۳. علامت b را می‌توان با روش‌های مختلفی تشخیص داد:

الف) با استفاده از فرمول طول رأس سهمی $(x_S = \frac{-b}{2a})$ ، وقتی که علامت x_S و a را می‌دانیم، علامت b هم مشخص می‌شود.

$$x_S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$

ب) شیب خط مماس در نقطه c ، همان b است.

$$\Rightarrow b < 0$$

پ) از فرمول جمع ریشه‌ها $(S = \frac{-b}{a})$ نیز می‌توان علامت b را تشخیص داد. (البته در صورتی که سهمی ریشه داشته باشد).

$$\Rightarrow S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$



$$x > [x]$$



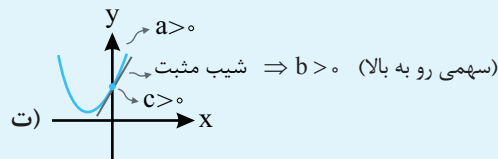
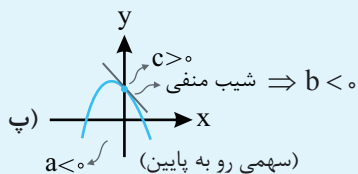
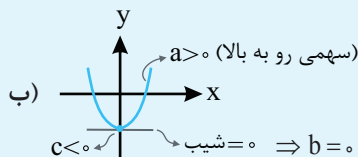
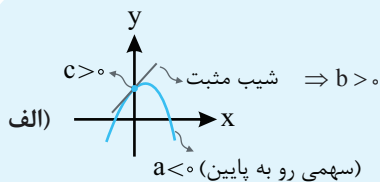
$$|x|$$



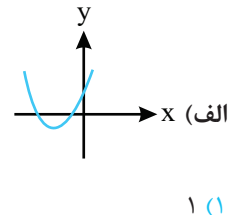
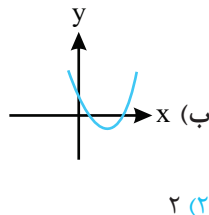
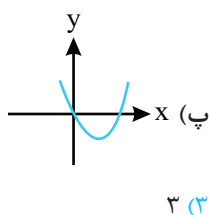
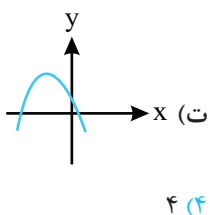
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



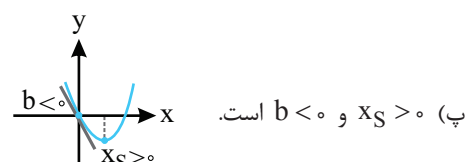
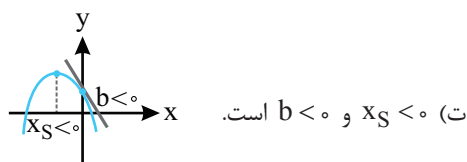
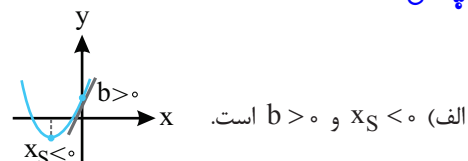
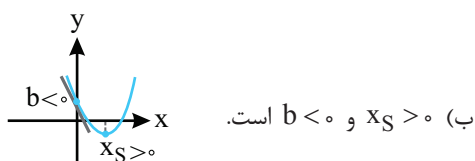
مثال آموز:



تست آموز: در چند مورد از سهمی های داده شده با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ ، طول رأس سهمی (x_S) با b هم علامت است؟

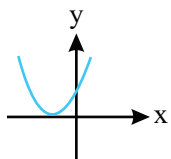


پاسخ:



گزینه «۱»

تست آموز: کدام یک در مورد سهمی روبه رو درست است؟



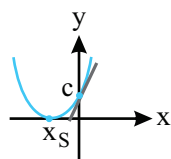
۱) $b < \Delta < a$

۲) $c < \Delta < x_S$

۳) $x_S < \Delta < b$

۴) $x_S < a < \Delta$

پاسخ: سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$ است. سهمی بر محور x مماس شده است، پس $\Delta = 0$ است. سهمی محور y ها را در بالای مبدأ قطع کرده، پس $c > 0$ است. شیب خط مماس در نقطه c مثبت است، پس $b > 0$ می باشد. همچنین طول رأس سهمی یعنی x_S منفی است.



و اما بررسی گزینه ها:

گزینه (۱) نادرست است، زیرا b مثبت است و کمتر از Δ (صفر) نیست.

گزینه (۲) نادرست است، زیرا c مثبت است و کمتر از Δ (صفر) نیست.

گزینه (۳) درست است، زیرا x_S منفی، صفر و b مثبت است.

گزینه (۴) نادرست است، زیرا اگرچه a مثبت است و از x_S (منفی) بیشتر است ولی از Δ (صفر) کمتر نیست. گزینه «۳»



وضعیت دو نمودار نسبت به هم

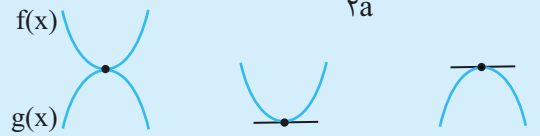
درس آموز

در ادامه در مورد نقاط برخورد (تلاقی) نمودار دو تابع f و g بحث خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا معادله تلاقی (تقاطع) نمودار دو تابع، یعنی $f(x) = g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و در صورتی که این معادله، درجه دوم شود، سه حالت می‌تواند رخ دهد.

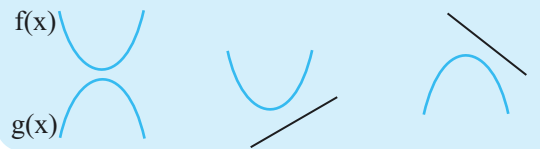
۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، نمودار دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند. مثال:



۲. اگر $\Delta = 0$ باشد، نمودار دو تابع f و g در یک نقطه با هم برخورد دارند که طول این نقطه تلاقی برابر $x = \frac{-b}{2a}$ است.



۳. اگر $\Delta < 0$ باشد، نمودار دو تابع f و g هیچ نقطه تلاقی‌ای با یکدیگر ندارند.



تست آموز: دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x^2 - 6x - 4m$ و $g(x) = -2x^2 + 4x + m$ ، یک نقطه تلاقی دارند، طول آن نقطه کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: برای به‌دست آوردن نقطه تلاقی، باید $f(x) = g(x)$ را تشکیل داده و Δ را مساوی صفر قرار داده و بعد از پیدا کردن m ، طول نقطه تلاقی را بیابیم.

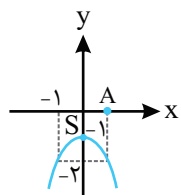
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x^2 - 6x - 4m = -2x^2 + 4x + m \Rightarrow 5x^2 - 10x - 5m = 0 \xrightarrow{\div 5} x^2 - 2x - m = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-m) = 4 + 4m = 0 \Rightarrow m = -1$$

پس $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ ، که طول نقطه تلاقی برابر است با:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \quad \text{گزینه «۱»}$$

تست آموز: با توجه به شکل زیر خطی که از نقطه A و رأس سهمی می‌گذرد، سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: ابتدا ضابطه سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را به‌دست می‌آوریم که رأس آن $S(0, -1)$ است:

$$y = a(x - 0)^2 - 1 \xrightarrow{(-1, -2)} -2 = a(-1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1$$

پس $y = -x^2 - 1$. از طرفی دیگر چون نقطه A با نقطه به طول -1 دارای یک y هستند، پس:

$$x_S = \frac{x_A + (-1)}{2} \Rightarrow 0 = \frac{x_A + (-1)}{2} \Rightarrow x_A - 1 = 0 \Rightarrow x_A = 1$$

بنابراین معادله خطی که از نقاط $A(1, 0)$ و $S(0, -1)$ (رأس سهمی) می‌گذرد را مشخص می‌کنیم:

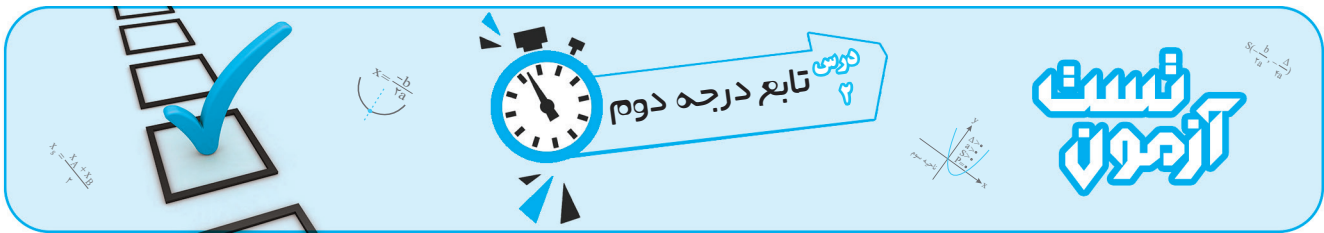
$$m = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(1, 0): y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 \quad (\text{معادله خط})$$

با مساوی قرار دادن دو تابع (خط و سهمی) داریم:

$$-x^2 - 1 = x - 1 \Rightarrow -x^2 - x = 0 \Rightarrow -x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -1$$

پس خط، سهمی را علاوه بر نقطه‌ای با طول $x = 0$ در نقطه‌ای با طول $x = -1$ نیز قطع می‌کند. گزینه «۱»



سطح یک



۷۵. ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۷۶. اگر رأس سهمی با ضابطه $y = mx^2 + nx$ ، نقطه $S(1, -2)$ باشد، $m^2 + n^2$ کدام است؟

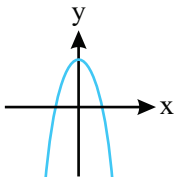
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۶

۷۷. مختصات رأس سهمی با ضابطه $y = 4x^2 - 12x + 13$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{3}{4}, 4)$ (۲) $(3, 13)$ (۳) $(3, 8)$ (۴) $(\frac{3}{4}, -4)$

۷۸. سهمی با ضابطه $y = -2x^2 + 3x + 5$ دارای:

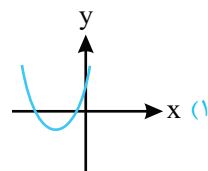
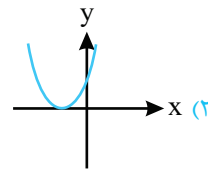
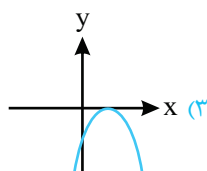
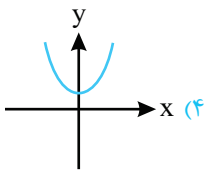
- (۱) ماکزیمم به طول $\frac{3}{4}$ است. (۲) مینیمم به طول $\frac{3}{4}$ است. (۳) ماکزیمم به طول $-\frac{3}{4}$ است. (۴) مینیمم به طول $-\frac{3}{4}$ است.



۷۹. در سهمی روبه‌رو کدام رابطه برقرار است؟

- (۱) $\Delta < 0$ (۲) $S > 0$
(۳) $P < 0$ (۴) $\Delta = 0$

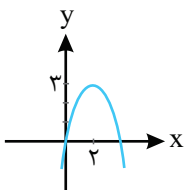
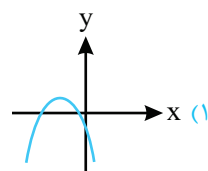
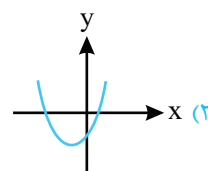
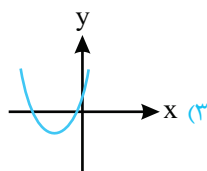
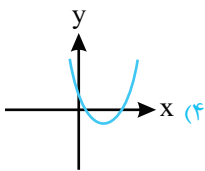
۸۰. در کدام یک از سهمی‌های زیر $\Delta = 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ است؟



۸۱. به ازای کدام مقادیر m ، منحنی با ضابطه $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه محوهای مختصات می‌گذرد؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $m < -1$ (۳) $-2 < m < -1$ (۴) $-4 < m < -2$

۸۲. اگر a ، b و c هر سه اعدادی مثبت باشند، نمودار سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

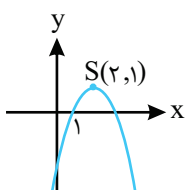


۸۳. نمودار $y = k(x-a)^2 + b$ به صورت مقابل است. k کدام است؟

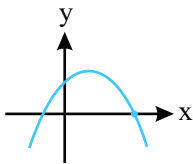
- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$
(۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۸۴. سهمی روبه‌رو مربوط به تابع f است. کدام یک، صفر تابع f است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲
(۳) $2/5$ (۴) ۳



معادله و تابع درجه دوم



۸۵. در سهمی روبه‌رو a و c به ترتیب:

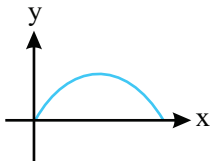
- (۱) مثبت و مثبت
(۲) مثبت و منفی
(۳) منفی و مثبت
(۴) منفی و منفی

۸۶. دو سهمی $y = x^2 + 2x - 1$ و $y = x^2 - 2x + 1$ چند نقطه برخورد دارند؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

۸۷. فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویه 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه 20 m/s شوت کند. معادله مسیر حرکت این توپ،

یک تابع درجه دو با ضابطه $y = \frac{-1}{40}x^2 + x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده بر حسب



متر و y ارتفاع توپ از سطح زمین است. حداکثر ارتفاع توپ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۳۰
(۴) ۴۰

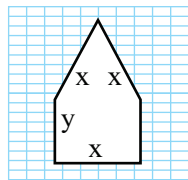
۸۸. در مسأله قبل، توپ در چه فاصله‌ای از مبدأ (محل شوت زدن) با زمین برخورد می‌کند؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۳۰
(۴) ۴۰

۸۹. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره 4 m باشد، عرض مستطیل

تقریباً کدام باشد که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{6}$
(۳) $\frac{1}{8}$
(۴) ۱



سطح دو



۹۰. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به ضابطه $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ ، همواره پایین محور x ‌ها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

- (۱) $1 < m < 5$
(۲) $2 < m < 5$
(۳) $2 < m < 4$
(۴) $2 < m < 6$

۹۱. به‌ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ ، همواره در زیر محور x ‌ها است؟

- (۱) $m < -\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2} < m < 1$
(۳) $1 < m < \frac{3}{2}$
(۴) $m > \frac{3}{2}$

۹۲. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ ، بالای محور x ‌ها است؟

- (۱) $a < -1$
(۲) $a > 1$
(۳) $a > 2$
(۴) $1 < a < 2$

۹۳. به‌ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ ، در یک نقطه مماس بر محور x ‌ها و در بقیه نقاط بالای محور

x ‌ها است؟

- (۱) -3
(۲) $-\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۳

۹۴. به‌ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ ، همواره بالای محور x ‌ها است؟

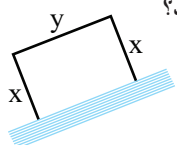
- (۱) $m > -2$
(۲) $-2 < m < -1$
(۳) $-2 < m < 2$
(۴) $-1 < m < 2$

۹۵. منحنی با ضابطه $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ در یک نقطه با محور x ‌ها برخورد دارد. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

- (۱) $-4 < a < 0$
(۲) $0 < a < 2$
(۳) $0 < a < 4$
(۴) $4 < a$

۹۶. قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر فقط

۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، اختلاف ابعاد مستطیل کدام باشد که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد؟



- (۱) صفر
(۲) ۲۵
(۳) ۵۰
(۴) ۷۵



$$x > [x]$$



$$|x|$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۹۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

۹۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m نمودار سهمی $y = (1-m)x^2 - (m-2)x$ از ناحیه دوم صفحه مختصات عبور نمی کند؟

- (۱) $1 < m \leq 2$ (۲) $1 \leq m \leq 2$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 \leq m < 2$

۹۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می کند؟

- (۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$

۱۰۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی، قطع می کند؟

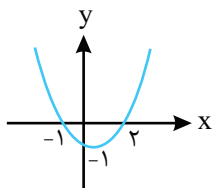
- (۱) $m > 2$ (۲) $-1 < m < 2$ (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m

۱۰۱. اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m > 3$ (۲) $3 < m < 4$ (۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$

۱۰۲. راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادله آن به صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ ($t \geq 0$) است. چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

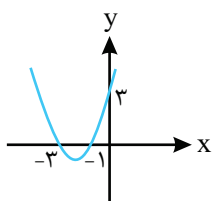
- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰



۱۰۳. معادله سهمی روبه رو کدام است؟

(۱) $y = -\frac{1}{2}(x-2)(x+1)$ (۲) $y = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$

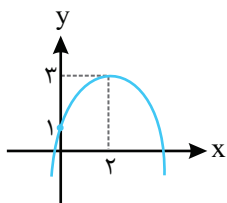
(۳) $y = (2-x)(x+1)$ (۴) $y = x^2 - x - 2$



۱۰۴. معادله سهمی روبه رو کدام است؟

(۱) $y = 2x^2 + 8x + 6$ (۲) $y = 2x^2 - 4x + 6$

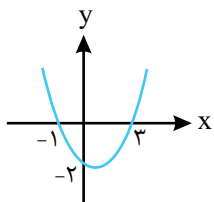
(۳) $y = x^2 - 4x + 3$ (۴) $y = x^2 + 4x + 3$



۱۰۵. معادله سهمی روبه رو کدام است؟

(۱) $y = -(x-2)^2 + 3$ (۲) $y = \frac{-1}{2}x^2 - 2x + 1$

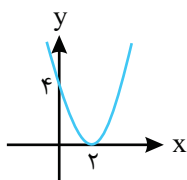
(۳) $y = (x-2)^2 - 3$ (۴) $y = \frac{-1}{2}x^2 + 2x + 1$



۱۰۶. معادله سهمی روبه رو کدام است؟

(۱) $y = x^2 - 2x - 3$ (۲) $y = x^2 + 2x - 2$

(۳) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$ (۴) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$



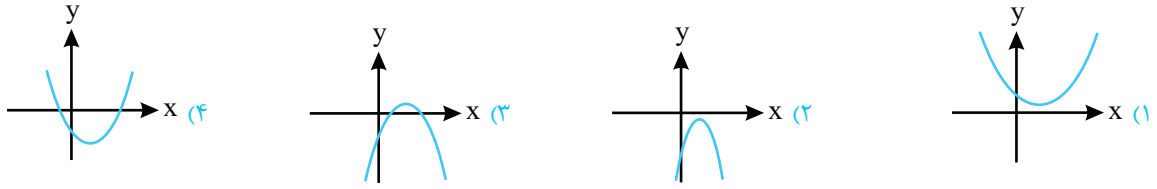
۱۰۷. نمودار زیر مربوط به سهمی با معادله $y = ax^2 + bx + c$ است، مقدار b کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲

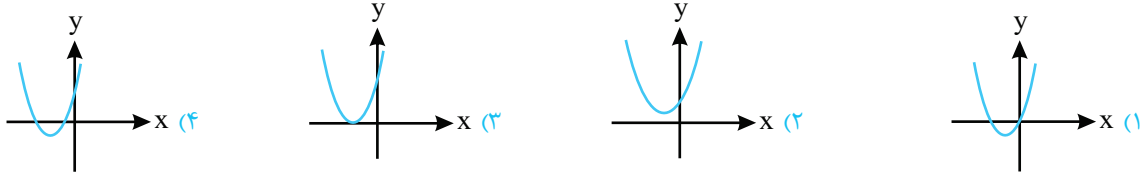
- (۳) -۳ (۴) -۴



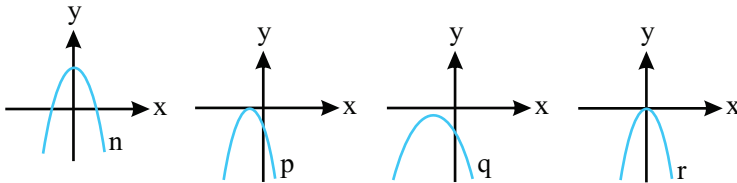
۱۰۸. در کدام یک از سهمی‌های زیر $(y = ax^2 + bx + c)$ ، قطعاً رابطه $a + \Delta > b$ برقرار است؟



۱۰۹. در کدام یک از سهمی‌های زیر $(y = ax^2 + bx + c)$ ، امکان دارد که رابطه $\Delta + c < 0$ برقرار باشد؟



۱۱۰. چند مورد از موارد داده شده در جدول زیر، در مورد نمودارهای زیر با معادله $y = ax^2 + bx + c$ نادرست هستند؟



تابع ویژگی	n	p	q	r
علامت a	-	+	-	-
علامت b	+	-	-	-
علامت c	+	+	-	+
تعداد ریشه‌ها	دو ریشه	یک ریشه مضاعف	فاقد ریشه	یک ریشه مضاعف
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی مثبت یکی منفی	-	ریشه ندارد	+

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۹

سطح سه



۱۱۱. به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطه $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

(تجربی خارج ۹۳)

(۴) ۱۲

(۳) -۴ و ۱۲

(۲) ۴ و -۱۲

(۱) -۴

۱۱۲. محل تلاقی دو سهمی $y = x^2 + 1$ و $y = -x^2 + 5$ ، نقطه‌های A و B است. طول پاره خط AB کدام است؟

(۴) ۳

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) ۶

(۱) $\sqrt{2}$

۱۱۳. منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد، مجموعه مقادیر m چگونه است؟

(۴) $9 < m < 25$ (۳) $7 < m < 15$ (۲) $15 < m < 23$ (۱) $5 < m < 13$

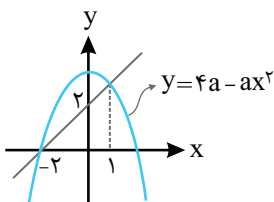
۱۱۴. با توجه به شکل روبه‌رو مقدار a کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

(۴) ۶

(۳) ۳



۱۱۵. به ازای کدام مقدار a ، نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = ax^2 + 4x$ بر هم مماس هستند؟

(ریاضی ۹۱)

(۴) -۱

(۳) -۲

(۲) -۳

(۱) -۴

۱۱۶. سهمی $y = -x^2 + 4$ با خط $y = 2x + k$ در دو نقطه تلاقی دارند، حدود k کدام است؟

- (۱) $k < 0$ (۲) $k > 0$ (۳) $k < 5$ (۴) $k > 5$

۱۱۷. استاد یومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، شعاع دایره کدام باشد که مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن گردد؟

- (۱) $\frac{1500}{\pi + 4}$ (۲) $\frac{750}{\pi + 4}$ (۳) $\frac{1500}{\pi + 2}$ (۴) $\frac{750}{\pi + 2}$

۱۱۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی گذرد؟ (ریاضی ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۱۱۹. از نقطه $A(0, -2)$ دو مماس بر سهمی به معادله $y = 4x^2 + 3$ رسم می کنیم تا در نقاط C و B بر سهمی مماس شوند. طول پاره خط BC کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

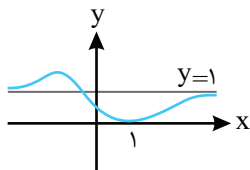
۱۲۰. نمودار توابع با ضابطه های $y = x^2$ و $y = \cos x$ در چند نقطه با یکدیگر متقاطع اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۲۱. نمودار توابع با ضابطه های $y = x^2 + 1$ و $y = \cos x$ ، در چند نقطه با هم برخورد دارند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۲۲. اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 3x + 5}$ به صورت روبه رو باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



- (۱) $(2, 1)$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(2, -1)$

۱۲۳. کوتاه ترین فاصله بین مجموعه نقاط به معادله $y = \sqrt{x^2 + 4}$ و نقطه ثابت $(1, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۲۴. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

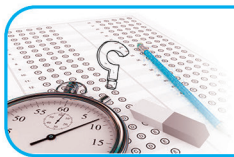
(تجربی خارج ۹۹)

- (۱) $(5, -7)$ (۲) $(5, -9)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(1, 5)$

۱۲۵. فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ ، بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

(تجربی ۹۹)

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$



معادله و تابع درجه دوم

آزمون جامع فصل ۱



وقت پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

سطح یک



۱. ریشه‌های معادله $4x^2 - 4x + 1 - 3^4 = 0$ کدام هستند؟

- {-۵, -۴} (۴) {۵, -۴} (۳) {-۵, ۴} (۲) {۵, ۴} (۱)

۲. معادله $mx^2 - 3x - 1 = 0$ به‌ازای کدام مقدار m دو ریشه معکوس دارد؟

- ۳ (۴) ۳ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

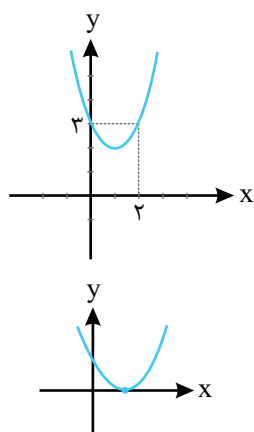
۳. اگر یک سهمی از نقاط $A(0, 5)$ و $B(4, 5)$ بگذرد، معادله خط تقارن آن کدام است؟

- $y = 2$ (۴) $y = 1$ (۳) $x = 2$ (۲) $x = 1$ (۱)

۴. نمودار $y = a(x - k)^2 + h$ به‌صورت مقابل است. مقدار k کدام است؟

- ۲ (۲) ۱ (۱)

- ۴ (۴) ۳ (۳)



۵. در نمودار روبه‌رو $\Delta + S + P$ کدام است؟

- صفر (۱) مثبت (۲)

- منفی (۳) نامعلوم (۴)

۶. دو سهمی $y = x^2 + x - 1$ و $y = x^2$ چند نقطه برخورد دارند؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴)

سطح دو



۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل $A = (\alpha - \frac{1}{\alpha})^2 + \alpha^2 - \frac{1}{\beta^2}$ کدام است؟

- ۳۵ (۴) ۲۵ (۳) ۱۵ (۲) ۵ (۱)

۸. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش، دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 4 = 0$ باشد، کدام است؟

- $x^2 - 14x + 13 = 0$ (۴) $x^2 - 13x + 14 = 0$ (۳) $2x^2 - 14x + 13 = 0$ (۲) $2x^2 - 13x + 14 = 0$ (۱)

۹. معادله $(2x^4 - x^2)^2 - 3(2x^4 - x^2) + 2 = 0$ چند جواب دارد؟

- ۸ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

۱۰. معادله‌های $x^2 + 2x - 3 = 0$ و $x^3 + x^2 + 7x - 9 = 0$ چند ریشه مشترک دارند؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴)

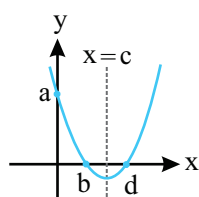
۱۱. اگر معادله $x^2 - mx + m - 3 = 0$ دو جواب مثبت داشته باشد، حدود m کدام است؟

- هیچ مقدار (۱) $m > 0$ (۲) $m > 3$ (۳) هر مقدار m (۴)

۱۲. نمودار سهمی با ضابطه $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 4$ به شکل زیر است. مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

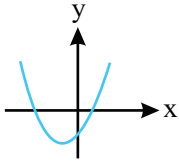
- ۱۱ (۲) ۱۰ (۱)

- ۱۳ (۴) ۱۲ (۳)



۱۳. به ازای کدام مقادیر از a ، منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی گذرد؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a \leq -2$ (۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 0$



۱۴. در سهمی روبه رو علامت ac و $b + \Delta$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) $+$ و $+$ (۲) $-$ و $-$ (۳) $-$ و $+$ (۴) $+$ و $+$

سطح سه



۱۵. اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل $A = \frac{\alpha^4\beta + \alpha\beta^4 - 3\alpha\beta}{(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1)(\beta^3 - 3\beta^2 + 1)}$ کدام است؟

- (۱) 78 (۲) 80 (۳) 82 (۴) 84

۱۶. اگر α و β دو ریشه از چهار ریشه معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ باشند به طوری که ریشه های معادله تشکیل دنباله حسابی دهند، کدام رابطه برقرار است؟

- (۱) $\alpha = 4\beta$ (۲) $\alpha = 3\beta$ (۳) $\alpha = 2\beta$ (۴) $\alpha = \beta$

۱۷. در معادله $2x^2 + x - m = 0$ ، عدد یک خارج از دو ریشه قرار دارد. حدود m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{8} < m < 3$ (۲) $m < 3$ (۳) $m > -\frac{1}{8}$ (۴) $m < -\frac{1}{8}$ یا $m > 3$

۱۸. حاصل جمع ریشه های معادله درجه دومی که ریشه هایش به ترتیب ۵ واحد بیشتر از قرینه ریشه های معادله $mx^2 - 2x + 1 = 0$ باشد، چند برابر حاصل جمع ریشه های معادله اولیه $(mx^2 - 2x + 1 = 0)$ است؟

- (۱) $1 - 5m$ (۲) $2(1 - 5m)$ (۳) $5m - 1$ (۴) $2(5m - 1)$

۱۹. در بین مستطیل هایی با محیط ۳۰، طول کوتاه ترین قطر تقریباً کدام است؟

- (۱) 10 (۲) $10/5$ (۳) 11 (۴) $11/5$

۲۰. دو سهمی به معادله های $f(x) = -x^2 - x - k$ و $g(x) = x^2 - 5x - 1$ همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند. صفرهای تابع

$h(x) = 2x^2 - kx - 2$ کدام اند؟

- (۱) $\left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$ (۲) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ (۳) $\left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$ (۴) $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$



خلاصه و چکیده فصل ششم معادله و تابع درجه دوم



اگر $b = 0$ باشد، آنگاه $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ (شرط: $\frac{c}{a} \leq 0$) است.

اگر $c = 0$ باشد، آنگاه $x = 0$ یا $x = \frac{-b}{a}$ است.

اگر $a + b + c = 0$ باشد، آنگاه $x = 1$ یا $x = \frac{c}{a}$ است.

اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه $x = -1$ یا $x = \frac{-c}{a}$ است.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta > 0 \rightarrow \text{دو ریشه حقیقی متمایز} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{یک ریشه مضاعف} \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{array} \right\} \Delta = b^2 - 4ac$$

تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$

تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره منفی است اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$

حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

معادله درجه دوم

روابط بین ریشه‌ها

$$D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \text{ (اختلاف ریشه‌ها) و } P = \frac{c}{a} \text{ (حاصل ضرب ریشه‌ها) و } S = \frac{-b}{a} \text{ (مجموع ریشه‌ها)}$$

دو ریشه عکس هم هستند اگر $a = c$. (شرط: $\Delta > 0$)

دو ریشه قرینه هم هستند اگر $b = 0$. (شرط: $\frac{c}{a} < 0$)

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، آنگاه:

الف) $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

ب) $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$

پ) $x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

ت) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \quad (P \neq 0)$

ث) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{S^2 - 2P}{P} \quad (P \neq 0)$

ج) $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}} \quad x_1 \geq x_2 \geq 0$

چ) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = PS$

توجه داشته باشید که ریشه‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، مثلاً $ax_1^2 + bx_1 = -c$

به‌طور کلی یک ریشه، n برابر دیگری است اگر $\frac{b^2}{ac} = \frac{(n+1)^2}{n}$

معادله و تابع درجه دوم

دو ریشه متمایز مثبت هستند اگر $\Delta > 0$ و $P > 0$ و $S > 0$ باشد.

دو ریشه متمایز منفی هستند اگر $\Delta > 0$ و $P > 0$ و $S < 0$ باشد.

بررسی علامت ریشه‌ها

دو ریشه مختلف‌العلامت هستند اگر، $P < 0$ باشد. (Δ خود به خود مثبت می‌شود).

دو ریشه مختلف‌العلامت هستند و قدر مطلق ریشه مثبت بیشتر است اگر، $P < 0$ و $S > 0$ باشد.

دو ریشه مختلف‌العلامت هستند و قدر مطلق ریشه منفی بیشتر است اگر، $P < 0$ و $S < 0$ باشد.

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، آنگاه $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ است.

اگر $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ ، آنگاه $y = a(x^2 - Sx + P)$ است.

اگر یکی از ریشه‌ها $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد و بخواهیم ضرایب گویا باشند، ریشه دیگر را $\alpha - \sqrt{\beta}$ در نظر می‌گیریم.

معادله درجه دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های این معادله درجه دوم باشند به صورت $y = cx^2 + bx + a$ است.

معادله درجه دومی که ریشه‌هایش قرینه ریشه‌های معادله درجه دوم باشد به صورت $y = ax^2 - bx + c$ است.

معادله درجه دومی که ریشه‌هایش n برابر ریشه‌های معادله درجه دوم باشد به صورت $y = ax^2 + bnx + cn^2$ است.

معادله درجه دومی که ریشه‌هایش m واحد بیشتر (کمتر) از ریشه‌های معادله درجه دوم باشد با تبدیل x به $(x - m)$

$(x + m)$ به دست می‌آید.

تشکیل معادله درجه دوم

$$y = ax^2 + bx + c$$

عدد k بین دو ریشه است اگر $af(k) < 0$ باشد.

عدد k از هر دو ریشه بزرگتر است اگر $k + \frac{b}{2a} > 0$ و $k > \frac{-b}{2a}$ باشد.

عدد k از هر دو ریشه کوچکتر است اگر $k + \frac{b}{2a} < 0$ و $k < \frac{-b}{2a}$ باشد.

مقایسه یک عدد با ریشه‌های معادله
درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$

تغییر متغیر

بعضی معادله‌ها را با استفاده از تغییر متغیر می‌توان به معادله درجه دوم تبدیل کرد و سپس حل کنیم.

بررسی ریشه‌های معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ با تغییر متغیر $x^2 = t$ به معادله $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود.

معادله چهار ریشه برای x دارد اگر $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ باشد. (ریشه‌ها دوبه‌دو قرینه‌اند).

معادله فقط دو ریشه برای x دارد اگر $\Delta = 0$ و $S \geq 0$ یا $P < 0$ باشد.

معادله هیچ ریشه‌ای برای x ندارد اگر $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ یا $\Delta < 0$ و $S < 0$ باشد.

اگر $c = 0$ باشد معادله یک ریشه مضاعف برای x دارد و اگر $\frac{-b}{2a} \geq 0$ باشد معادله دو ریشه دیگر هم دارد که با هم قرینه هستند.

بررسی ریشه‌های معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود.

(۱) معادله اصلی دو ریشه متمایز دارد اگر $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P \geq 0$

(۲) معادله اصلی یک ریشه دارد اگر $\Delta = 0$ و $S > 0$ یا $P < 0$ (یک ریشه غیر صفر)

یا $[S < 0$ و $P = 0]$ (یک ریشه $x = 0$)

(۳) معادله اصلی هیچ ریشه‌ای برای x ندارد اگر $\Delta < 0$ یا $[S < 0$ و $\Delta = 0]$

یا $[P > 0$ و $S < 0$ و $\Delta > 0]$

$X = \alpha$ ریشه مشترک دو معادله $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ است هرگاه، $f(\alpha) = 0$ و $g(\alpha) = 0$.

ریشه مشترک معادله‌ها



$$x = \frac{-b}{2a}$$

رأس سهمی $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است که به جای $\frac{-\Delta}{4a}$ می‌توان از $f(\frac{-b}{2a})$ استفاده کرد.

خط تقارن سهمی $x = x_S = \frac{-b}{2a}$ است.

رأس و خط تقارن سهمی
(نمودار تابع درجه دوم)

هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$)، رأسی به مختصات $S(h, k)$ و خط تقارنی به معادله $x = h$ دارد.

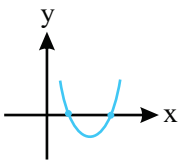
در بعضی از مسائل بیشترین یا کمترین مقدار را می‌خواهند که باید مقدار $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ را بیابیم.

صفرهای تابع $f(x)$ همان ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ است.

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، آنگاه تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ نوشت.

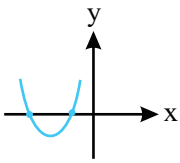
صفرهای تابع

معادله و تابع درجه دوم

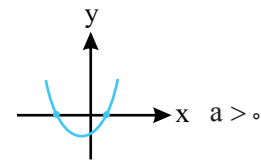


اگر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

(۱) معادله سهمی به صورت $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ است.



(۲) سهمی محور x ها را در دو نقطه سمت راست مبدأ قطع می‌کند اگر $P > 0$ و $S > 0$ و $\Delta > 0$ و $a > 0$.



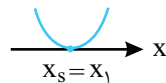
(۳) سهمی محور x ها را در دو نقطه سمت چپ مبدأ قطع می‌کند اگر $P > 0$ و $S < 0$ و $\Delta > 0$ و $a > 0$.

(۴) سهمی محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند اگر $P < 0$.

نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نسبت به محور x ها سه حالت دارد

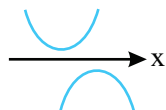
اگر $\Delta = 0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی بر محور x ها مماس است.

معادله سهمی به صورت $y = a(x-x_1)^2$ است.

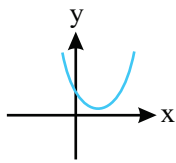


x_1 همان x_S یعنی $\frac{-b}{2a}$ است.

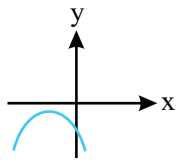
عرض رأس سهمی برابر صفر است.



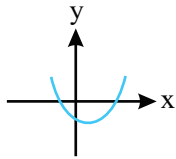
اگر $\Delta < 0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند.



سهمی حتماً از ناحیه‌های اول و دوم می‌گذرد اگر $a > 0$ باشد.
(دقت کنید می‌تواند از ناحیه‌های دیگر هم عبور کند.)



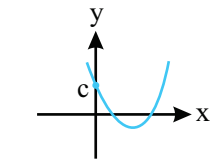
سهمی حتماً از ناحیه‌های سوم و چهارم می‌گذرد اگر $a < 0$ باشد.
(دقت کنید می‌تواند از ناحیه‌های دیگر هم عبور کند.)



سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد اگر $P = \frac{c}{a} < 0$ باشد.

سهمی فقط از سه ناحیه عبور می‌کند (فقط از یک ناحیه عبور نمی‌کند) اگر دو ریشه هم‌علامت باشند یا فقط یکی از ریشه‌ها صفر باشد که به حالت‌های مختلفی می‌تواند رسم شود.

سهمی و ناحیه‌های مختصات

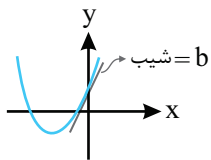


اگر سهمی رو به بالا باشد $a > 0$



اگر سهمی رو به پایین باشد $a < 0$

عرض محل برخورد با محور y ها همان c است.



علامت‌های a، b و c از روی نمودار سهمی

شیب خط مماس در نقطه‌ای با عرض c، برابر با b است.

برای به‌دست آوردن محل تلاقی (برخورد) نمودارهای دو تابع f و g، معادله تلاقی، یعنی $f(x) = g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم.



اگر $f(x) - g(x) = 0$ یک معادله درجه دوم باشد، سه حالت می‌تواند رخ دهد.
(۱) نمودار توابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند، اگر $\Delta > 0$ باشد.



(۲) نمودار توابع f و g در یک نقطه با هم برخورد دارند، اگر $\Delta = 0$ باشد.



(۳) نمودار توابع f و g در هیچ نقطه تلاقی ندارند، اگر $\Delta < 0$ باشد.

وضعیت دو نمودار نسبت به هم



معادله و تابع درجه دوم



۳ ۷ عبارت درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.
باید $\Delta < 0$ و ضریب x^2 منفی باشد.

$$a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \quad (2) \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < a < 5$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} (a < 1) \cap (1 < a < 5) = \emptyset$$

۳ ۸ توجه: در معادلات درجه دوم، اگر ضریب x (b)، عددی زوج باشد، می‌توان به جای روش Δ از $\Delta' = (\frac{b}{2})^2 - ac$ استفاده نمود.
برای اینکه عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد، باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 & (1) \\ \Delta' < 0 \Rightarrow 9 - (m-1)(2m+1) < 0 \Rightarrow 9 - 2m^2 + m + 1 < 0 \\ \Rightarrow 2m^2 - m - 10 > 0 \Rightarrow (2m-5)(m+2) > 0 \\ \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > \frac{5}{2} & (2) \end{cases}$$

از اشتراک روابط (1) و (2)، $m > \frac{5}{2}$ یا همان $m > 2/5$ به دست می‌آید.

۳ ۹ با استفاده از رابطه‌های $S = \frac{-b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ داریم:

$$(مجموع) S = \frac{(-1)}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad (حاصل ضرب) P = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

۳ ۱۰ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2$$

$$x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 x_2 = 2x_2^2 \Rightarrow 2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 = \pm 1$$

$$\text{جای‌گذاری در معادله داده شده: } \begin{cases} 1^2 + m(1) + 2 = 0 \Rightarrow m = -3 \\ (-1)^2 + m(-1) + 2 = 0 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$$

پاسخنامه تست آزمون درس اول (معادله درجه دوم)

۲ ۱ روش اول: با استفاده از روش دلتا داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-2)(3) = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{-4} = -1 \\ x_2 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

روش دوم: با توجه به اینکه $a + c = b$ ، پس $x_1 = -1$ و $x_2 = \frac{3}{2}$

۳ ۲

$$x^2 + 2ax + \dots = (x + \square)^2 = x^2 + 2\square x + \square^2 \quad a = \square$$

به جای مربع خالی در سمت راست باید a قرار گیرد تا تساوی برقرار شود، پس جای خالی سمت چپ باید a^2 باشد.

۳ ۳ باید $\Delta > 0$ باشد، پس:

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(1)(m) = 4m^2 - 4m = 4m(m-1) > 0$$

$$\Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 1$$

۳ ۴ باید $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ باشد، پس:

$$1) \Delta = (2b)^2 - 4(1)(1) = 4b^2 - 4 = 4(b^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq b \leq 1$$

2) $a = 1 > 0$ همواره برقرار است

۳ ۵ برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta > 0$ باشد، بنابراین:

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0$$

$$\Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 < 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(2m-7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3/5$$

درضمن ضریب x^2 نباید صفر باشد، یعنی $m \neq \frac{1}{2}$ است.

$$-1 < m < 3/5 - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

۴ ۶ معادله درجه دوم در صورتی دو جواب حقیقی دارد که $\Delta \geq 0$ باشد، پس:

$$\Delta = (4)^2 - 4(m+2)(m-1) = 16 - 4m^2 - 4m + 8$$

$$= -4m^2 - 4m + 24 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\div (-4)} m^2 + m - 6 \leq 0 \Rightarrow (m-2)(m+3) \leq 0$$

$$\Rightarrow -3 \leq m \leq 2$$

دقت داشته باشید که اگر مسأله دو جواب حقیقی متمایز می‌خواست باید $\Delta > 0$ می‌شد.

۲ ۱۲

راه حل دوم:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{225 - 12m}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6$$

$$\Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

۳ ۱۷

$$x^2 - 5mx + 16 = 0 \Rightarrow P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 16$$

$$x_1^3 = x_2^3 \xrightarrow{\times x_1} x_1^4 = x_1 x_2^3 = 16 \Rightarrow x_1 = \pm 2$$

$$\xrightarrow{x_1 > 0} x_1 = 2 \Rightarrow (2)^2 - 10m + 16 = 0 \Rightarrow m = 2$$

۲ ۱۸ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

با فرض اینکه x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، رابطه $x' = \frac{x''}{2} + 5$ بین آن‌ها برقرار است.

$$x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x' + x'' = 8 \Rightarrow \frac{x''}{2} + 5 + x'' = 8 \\ \frac{3x''}{2} = 3 \Rightarrow x'' = 2 \Rightarrow x' = \frac{2}{2} + 5 = 6 \\ P = x' x'' = m \Rightarrow 6 \times 2 = m \Rightarrow m = 12 \end{cases}$$

۲ ۱۹ برای اینکه معادله دارای دو ریشه مثبت باشد، باید $\frac{-b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta \geq 0$ باشد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = m > 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4} \cap m > 0 \Rightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4} \\ \frac{-b}{a} = 1 > 0 \quad (\text{همواره برقرار است}) \end{cases}$$

توجه کنید نزدیک‌ترین گزینه به جواب، گزینه (۲) است.

۲ ۲۰ این معادله در صورتی دو ریشه مختلف‌العلامت دارد که $\Delta > 0$ و

$\frac{c}{a} < 0$ باشد، بنابراین کافی است $\frac{c}{a} < 0$ باشد، زیرا در این صورت خودبه‌خود

$$\Delta > 0 \text{ می‌شود: } 1 < m < 3 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{m-3}{m-1} < 0$$

$$x_1 x_2 < 0 \Rightarrow b < 0$$

۴ ۲۱

مثبت یا منفی بودن Δ در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ مشخص نیست، ولی در گزینه (۴) باتوجه به منفی بودن b حتماً عبارت $\Delta = a^2 + 4b^2 - 4b = a^2 + 4(b^2 - b)$ مثبت است.

زیرا: $\Delta = a^2 + 4b^2 - 4b = a^2 + 4(b^2 - b)$ و می‌دانیم $b > 0$ است،

پس $-b < 0$ است، همچنین $b^2 < 0$ می‌شود، پس $b^2 - b < 0$ است و در نتیجه

$4(b^2 - b) < 0$ است، که اگر با $a^2 \geq 0$ جمع شود، داریم:

$$a^2 + 4(b^2 - b) < 0$$

$$2x^2 - 5x + m = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{37}{4} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{37}{4} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ در } (2)} \frac{25}{4} - 2 \times \frac{m}{2} = \frac{37}{4} \Rightarrow m = -3 \text{ ق.ق.}$$

دقت کنید بازای $m = -3$ ، $\Delta > 0$ می‌شود و معادله دو ریشه دارد، پس قابل قبول است.

۳ ۱۳

$$-3x^2 + (k^2 - 4)x + 3k - 1 = 0$$

معادله در صورتی دو ریشه قرینه دارد که، $\frac{c}{a} < 0$ و $b = 0$ باشد.

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{-3} < 0 \\ k^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > \frac{1}{3} \\ k = \pm 2 \end{cases} \cap \Rightarrow k = 2$$

۴ ۱۴ در صورتی معادله درجه دوم دو ریشه دارد که، $\Delta' \geq 0$ باشد،

پس $k \leq 4 \Rightarrow \Delta' = 4 - k \geq 0$ از طرف دیگر $\frac{c}{a} = k$ دیگر $x' x'' = \frac{c}{a}$ است، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} k \leq 4 \\ x' x'' = k \Rightarrow x' x'' \leq 4 \end{cases}$$

۳ ۱۵ ریشه‌های معادله داده‌شده را α و β در نظر می‌گیریم و طبق فرض $\alpha = 2\beta$ است.

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 2\beta^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \pm \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض، ریشه‌ها مثبت هستند}} \beta = \frac{3}{2}, \alpha = 3$$

$$\alpha + \beta = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۴ ۱۶ راه حل اول: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشند، آنگاه:}$$

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}, D = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\begin{cases} x' = x'' + 2 \\ x' + x'' = \frac{-b}{a} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x'' = 2 \\ x' + x'' = 5 \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{49}{4}\right) - 15\left(\frac{7}{2}\right) + m = 0 \xrightarrow{\times 4} 147 - 210 + 4m = 0$$

$$\Rightarrow -63 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$



روش دوم: با توجه به اینکه $\alpha + \beta = \frac{11}{2}$ و $\alpha\beta = 6$ است، پس باید

ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0$ را بیابیم:

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = 1/5$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف} = 4 - 1/5 = 2/5$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x \\ xy = 143 \end{cases}$$

$$x(24 - x) = 143 \Rightarrow x^2 - 24x + 143 = 0$$

$$\Rightarrow D = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-24)^2 - 572}}{1} = 2$$

روش اول: ۲۸ ۳

ریشه معادله جدید X ؛ $X = x + 1 \Rightarrow x = X - 1$

در معادله داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \xrightarrow{x=X-1} (X-1)^2 + a(X-1) - a^2 = 0$$

$$X^2 + (a-2)X - a^2 - a + 1 = 0$$

روش دوم: ریشه‌های معادله مجهول یک واحد از ریشه‌های معادله معلوم بیشتر هستند، پس X را به $X-1$ تبدیل می‌کنیم.

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x-1} (x-1)^2 + a(x-1) - a^2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + ax - a - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (a-2)x - a^2 - a + 1 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ و } x \rightarrow x+2$$

۲۹ ۱

$$(x+2)^2 + (x+2) - 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 + x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) + 3 = 0$$

۳۰ ۲

از تغییر متغیر $x^2 + 2 = A$ استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + 2 = A \Rightarrow A^2 - 4A + 3 = 0 \Rightarrow A = 1, 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \Rightarrow x^2 + 2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ (جواب ندارد)} \\ A=3 \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$x^2 + \sqrt{x} + 1 = A \text{ فرض کنید } \mathbf{۳۱ ۴}$$

$$(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + x^2 + \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + x^2 + \sqrt{x} + 1 - 2 = 0$$

از تغییر متغیر $x^2 + \sqrt{x} + 1 = A$ استفاده می‌کنیم:

$$A^2 + A - 2 = 0 \Rightarrow A = 1, A = -2$$

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 + \sqrt{x} + 1 = -2 \text{ (جواب ندارد)} \end{cases}$$

۲۲ ۲ باید مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{cases} S = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ P = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9-5}{4} = 1 \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - 3x + 1 = 0$$

روش اول: ۲۳ ۱

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4 \\ P = (x_1) \times (x_2) = a \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

روش دوم: چون ریشه‌ها به صورت $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ هستند، پس ضرایب گویا هستند.

$$x = 2 + \sqrt{4-a} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{4-a}$$

$$(x-2)^2 = 4-a \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4-a \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

۲۴ ۲ به این نکته دقت می‌کنیم که اگر در معادله درجه دوم، ضرایب

گویا باشند و یک ریشه $a + m\sqrt{b}$ باشد، ریشه دیگر مزدوج این ریشه است، یعنی $a - m\sqrt{b}$ ، پس در این تست که یکی از ریشه‌ها $3 + 2\sqrt{5}$ است و ریشه دیگر $3 - 2\sqrt{5}$ می‌باشد و داریم:

$$\begin{cases} S = (3 - 2\sqrt{5}) + (3 + 2\sqrt{5}) = 6 \\ P = (3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5}) = 9 - 20 = -11 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - 6x - 11 = 0$$

روش دوم:

$$x = 3 + 2\sqrt{5} \Rightarrow x - 3 = 2\sqrt{5} \xrightarrow{\text{توان}^2} x^2 - 6x + 9 = 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 11 = 0$$

این معادله، که معادله درجه دوم با ضرایبی صحیح است، جواب مورد نظر می‌باشد.

۲۵ ۳ دو عدد را α و β در نظر می‌گیریم، پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1/5 \\ \alpha\beta = -7 \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 + 1/5x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -3/5$$

پس α و β اعداد ۲ و $-3/5$ هستند که عدد بزرگتر ۲ است.

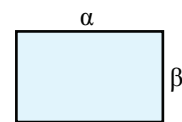
روش اول: ۲۶ ۲ اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم:

$$\text{محیط} = 11 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} \Rightarrow \beta = \frac{11}{2} - \alpha$$

$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \alpha\beta = 6 \Rightarrow \alpha\left(\frac{11}{2} - \alpha\right) = 6 \Rightarrow \frac{11}{2}\alpha - \alpha^2 = 6$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{11}{2}\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \text{ یا } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\beta = \frac{11}{2} - \alpha} \beta = \frac{3}{2} \text{ یا } \beta = 4$$



پس $\alpha = 4$ و $\beta = \frac{3}{2}$ می‌باشد. بنابراین اختلاف ابعاد $4 - 1/5 = 2/5$ است.

۳۷ ۲ باید $\Delta = 0$ شود، پس:

$$\Delta = (-3m)^2 - 4(m)(m+6) = 9m^2 - 4m^2 - 24m$$

$$= 5m^2 - 24m = m(5m - 24) \xrightarrow{\Delta=0} \begin{cases} m=0 & \text{غ ق} \\ m=\frac{24}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین به ازای یک مقدار m ، این عبارت مربع کامل است.۳۸ ۴ معادله باید به صورت $y = a(x-0)^2 = ax^2$ باشد، پس ضریب X و عدد ثابت، صفر می‌شوند:

$$\begin{cases} m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4 \\ m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m = -4$$

از طرفی به ازای $m = -4$ ، ضریب x^2 صفر نمی‌شود و معادله به صورت

$$y = 32x^2 \text{ است، بنابراین } m = -4 \text{ قابل قبول است.}$$

۳۹ ۳ در معادله $(x-2)(x^2 + mx + 4) = 0$ ، عبارت $x-2$ داراییک ریشه $x=2$ است، پس عبارت $x^2 + mx + 4 = 0$ نباید ریشه داشته باشد و یا ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4(1)(4) = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < m < 4 & (1) \\ x^2 + mx + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + mx + 4 = x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow m = -4 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع (1), (2)}} -4 \leq m < 4$$

۴۰ ۴ از مقوای سمت چپ، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر جدا شده

است تا جعبه سمت راست به دست آید. حجم این جعبه برابر است با:

$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = (x)(x)(2) = 2x^2$$

از آنجا که باید حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، داریم: $2x^2 = 200$ ،بنابراین $x^2 = 100$ و در نتیجه $x = 10$ (طول نمی‌تواند منفی باشد و تنها

مثبت ۱۰ مورد قبول است) و طول ضلع ورقه مربعی برابر است با:

$$x + 4 = 10 + 4 = 14$$

۴۱ ۳ اگر پول اولیه علی را x و پول اولیه اکرم را y فرض کنیم:

$$\begin{cases} x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x \\ (x - 10)(y + 10) = 475 \Rightarrow xy + 10x - 10y - 100 = 475 \\ \Rightarrow xy + 10(x - y) = 575 & (1) \end{cases}$$

با جای گذاری رابطه $y = 100 - x$ در رابطه (۱) داریم:

$$x(100 - x) + 10(x - (100 - x)) = 575$$

$$\Rightarrow 100x - x^2 + 10(2x - 100) = 575$$

$$\Rightarrow 100x - x^2 + 20x - 1000 = 575$$

$$\Rightarrow x^2 - 120x + 1575 = 0 \Rightarrow (x - 15)(x - 105) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 105 \text{ (غ ق)} \end{cases} \xrightarrow{y = 100 - x} y = 85$$

۳۲ ۱ با تغییر متغیر $x + \frac{1}{x} = t$ داریم:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 & (1) \\ t=3 & (2) \end{cases}$$

$$(1): x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$(2): x + \frac{1}{x} = 3 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{P=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}} x_2 x_3 = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} = 1$$

پس ریشه‌های معادله بالا x_1 و x_2 و x_3 هستند که حاصل ضرب همه

$$\text{آنها } (x_1 x_2 x_3) = 1 \times 1 = 1 \text{ است.}$$

۳۳ ۳

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \Rightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0 \xrightarrow{x^3=t} 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} t_1 = 1, t_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 & \text{ریشه بزرگتر} \\ x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 & \text{مکعب ریشه کوچکتر} \end{cases}$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 0 \text{ یک معادله دومجذوری به صورت مربع}$$

کامل است و داریم:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$$

پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

۳۵ ۳ از توان چهارم x استفاده می‌کنیم و معادله را به دست می‌آوریم:

$$x = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 + 8 + 4\sqrt{6} \Rightarrow 4\sqrt{6} = x^2 - 11$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (4\sqrt{6})^2 = (x^2 - 11)^2 \Rightarrow 96 = x^4 - 22x^2 + 121$$

$$\Rightarrow x^4 - 22x^2 + 25 = 0$$

۳۶ ۲ با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1 \text{ و } x_2 = \frac{-c}{a} = 7$$

که $x_1 = -1$ قابل قبول نیست، زیرا اندازه یک ضلع نمی‌تواند صفر یا منفیباشد و $x_2 = 7$ قابل قبول است.

$$\frac{1}{3} \times 8 \times 6 = 24 \text{ مساحت مثلث } \Rightarrow 6, 8, 10 \text{ اضلاع مثلث}$$



$$k = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \Rightarrow k^2 = \beta + \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} = 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} = \sqrt{5}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ اگر } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله درجه دوم باشد، آنگاه:}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, (x_1) \times (x_2) = \frac{c}{a}$$

در این گونه تست‌ها ابتدا باتوجه به صورت سؤال رابطه‌ای بین x_1 و x_2 می‌نویسیم و سپس یک رابطه دیگر بین x_1 و x_2 از خود معادله می‌یابیم:

$$x_1 = 3x_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$4x_2 = \frac{17}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{17}{12}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 17\left(\frac{1}{3}\right) + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ می‌دانیم که در معادله } ax^2 + bx + c = 0 \text{ مجموع جذر هر دو ریشه برابر است با:}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{m+1}{2}, P = \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2$$

$$\frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow m = 6 \text{ به توان ۲ می‌رسانیم}$$

$$\text{می‌دانیم اگر } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های این معادله درجه دوم باشند، داریم:}$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -m \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-m)^2 - 24 = 25 \Rightarrow m^2 = 49 \Rightarrow m = \pm 7$$

حال $m = \pm 7$ را در معادله دوم جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = 7 \Rightarrow 7x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{7}, \Delta > 0 \\ m = -7 \Rightarrow -7x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

(معادله فاقد ریشه حقیقی)

$$\text{اگر معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ دو ریشه قرینه داشته باشد، باید } b = 0 \text{ و } \frac{c}{a} < 0 \text{ باشد. به ازای } m = \pm 1, b = 0 \text{ است، اما}$$

چون $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$ است، ریشه قرینه نخواهیم داشت، پس با فرض $m = \pm 1$ نیز $\Delta < 0$ خواهد شد و بنابراین، اساساً این معادله ریشه حقیقی ندارد.

باید به این نکته دقت کرد که X و Y نمی‌توانند بزرگتر از ۱۰۰ باشند، پس غیرقابل قبول است.

$$\text{۴۲ ابتدا با استفاده از مخرج مشترک‌گیری، معادله را ساده‌تر}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^4} + 1 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

پس با استفاده از اتحاد چاق و لاغر که در صورت پراتنز اول و دوم مشاهده می‌شود، معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1)(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{(\sqrt[3]{x^2})^3 - 1^3}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x}$$

در آخر کسر به دست آمده را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$x^2 - 1 = 2\sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$\text{۴۳ مجذور یعنی مربع!}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \Rightarrow m = -2, m = 6$$

دقت کنید، $m = 6$ قابل قبول نمی‌باشد، زیرا تحت این شرایط، $\Delta < 0$ خواهد شد.

$$\text{۴۴ می‌دانیم } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله هستند، بنابراین در آن صدق می‌کنند و داریم:}$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 + 12\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 4\alpha^2 + 12\alpha = 1 \xrightarrow{\div 4} \alpha^2 + 3\alpha = \frac{1}{4} \quad (1) \\ 4\beta^2 + 12\beta - 1 = 0 \Rightarrow 4\beta^2 + 12\beta = 1 \xrightarrow{\div 4} \beta^2 + 3\beta = \frac{1}{4} \quad (2) \end{cases}$$

حال روابط (۱) و (۲) را در عبارت مورد نظر جایگزین می‌کنیم.

$$(\alpha^2 + 3\alpha)^5 + (\beta^2 + 3\beta)^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$\Rightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4^5}\right) = 2 \times \frac{1}{1024} = \frac{1}{512} = \left(\frac{1}{8}\right)^9$$

$$\text{۴۵ اگر } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشند، آنگاه:}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

باتوجه به معادله داده شده داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

۴۵۴ معادله درجه ۲ در صورتی دو ریشه منفی دارد که:

$$(۱) \Delta > 0, (۲) \frac{c}{a} > 0, (۳) \frac{-b}{a} < 0$$

گزینه (۱): $\begin{cases} \frac{c}{a} = k^2 + 1 > 0 \checkmark \text{ همواره برقرار است.} \\ \frac{-b}{a} = -k \times \text{ یک عدد حقیقی است که همواره منفی نیست.} \end{cases}$

گزینه (۲): $\frac{c}{a} = \frac{k-2}{1}$

$\frac{k-2}{1}$ یک عدد حقیقی همواره مثبت نیست، پس دارای شرایط فوق نمی باشد.

گزینه (۳): $\begin{cases} \frac{c}{a} = k^2 \geq 0 \times \text{ (صفر هم می باشد)} \\ \frac{-b}{a} = k^2 + 1 > 0 \times \end{cases}$

گزینه (۴): $\begin{cases} \frac{-b}{a} = -(k^2 + 2) < 0 \checkmark \\ \frac{c}{a} = k^2 + 2 > 0 \checkmark \end{cases}$ گزینه (۴) جواب است.

۴۵۵ اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}, \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

می توانیم معادله داده شده را حل کنیم و ریشه های آن را به سادگی به دست

آوریم: $5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = \alpha = -1 \\ x_2 = \beta = \frac{-c}{a} = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = 1 \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله دومی}} \begin{cases} S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} \\ P = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

۴۵۶ می دانیم برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش، عکس

ریشه های معادله درجه دوم داده شده ای باشد، باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش، k واحد کمتر از

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{جای } a \text{ و } c \text{ معکوس}]{\text{عکس}} -x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد کمتر}]{x \rightarrow x+1} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\frac{-b}{a} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{-m}{2} = 1$$

$$\Rightarrow -m = 2 \Rightarrow m = -2$$

اما از طرف دیگر داریم:

$$2x^2 + (-2)x + (1-4) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

که در این صورت:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} < 0, x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} > 1$$

پس به ازای $m = -2$ ، $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ نمی توانند ریشه های این معادله باشند، زیرا در این تست $0 \leq (\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha) \leq 1$.

۴۵۱ اگر x_1 و x_2 ریشه های این معادله باشند، آنگاه $x_1, \frac{1}{x_2}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. لذا:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x_2}} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{\frac{1}{x_2}} \xrightarrow{\frac{-b}{a} = \frac{1}{4}} \frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

باید $\Delta \geq 0$ باشد تا معادله دو ریشه داشته باشد.

$$m = 4 \Rightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 192 < 0 \text{ غق قق}$$

$$m = -4 \Rightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ قق}$$

۴۵۲ معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت است، هرگاه:

$$۱) \Delta > 0: m^2 - 4(2)(m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}} m < -4 \text{ یا } m > 12$$

$$۲) S = \frac{-b}{a} > 0: \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$۳) P = \frac{c}{a} > 0: \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6$$

اشتراک جواب های (۱)، (۲) و (۳) بازه $(-6, -4)$ می باشد.

۴۵۳ شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی

باشد، آن است که $\Delta > 0$ و $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -6 \text{ یا } m > 3 \quad (۱)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (۲)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (۳)$$

از اشتراک جواب های (۱)، (۲) و (۳) به جواب $3 < m < 6$ می رسیم.



۶۰. ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{1}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{1}$$

همچنین، اگر S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها باشند، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت.

ریشه‌های معادله $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ ، $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ هستند، داریم:

$$S' = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = PS = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{1}\right) = -\frac{1}{1}$$

$$P' = \alpha^2\beta \times \alpha\beta^2 = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = P^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$$

بنابراین معادله متناظر به صورت $x^3 + \frac{1}{27}x - \frac{1}{27} = 0$ می‌باشد. با ضرب طرفین معادله در عدد ۲۷، این معادله به صورت $27x^3 + x - 1 = 0$ درمی‌آید و لذا $k = 6$ است.

۶۱. ۳ می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، آنگاه:

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $\lambda x^2 - mx - 8 = 0$ و α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ باشند.

$$x_1 = \alpha^3, x_2 = \beta^3$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{1}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$S' = x_1 + x_2 = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = \frac{1}{1} + \frac{3}{1} = \frac{4}{1}$$

$$P' = x_1x_2 = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = -1$$

$$x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8x^2 - 13x - 8 = 0 \Rightarrow m = 13$$

توجه داشته باشید، به‌طور کلی معادله درجه دومی که جمع ریشه‌هایش S و ضرب ریشه‌هایش P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

۶۲. ۲ در این معادله، ضریب x^2 عدد ۲ است و چون عددی مثبت است، بنابراین علامت عبارت درجه دوم در بین ریشه‌ها باید مخالف علامت

۲، یعنی منفی باشد. یعنی باید $af\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ باشد. بنابراین داریم:

$$2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3}{4}\right) - 3 < 0 \Rightarrow 2\left(\frac{9}{16}\right) + \frac{3m}{4} - 3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3m}{4} < 3 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8} \Rightarrow m < \frac{15}{2}$$

«اگر توجه کنیم، مشخص است که Δ همواره بزرگتر از صفر است.»

۵۷. ۳ روش اول: ریشه‌های معادله جدید از معکوس ریشه‌های معادله قبلی، یک واحد بیشتر است.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{جای } c \text{ و } a \text{ عوض شده}]{\text{ریشه‌ها معکوس شده}} -4x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به ریشه‌ها اضافه شده}]{x \rightarrow x-1} -4(x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = 0$$

$$-4x^2 + 8x - 4 - 3x + 3 + 2 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

روش دوم:

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = -2, \alpha' = \frac{1}{\alpha} + 1, \beta' = \frac{1}{\beta} + 1$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۵۸. ۱ روش اول: اگر t ریشه معادله $3x^2 + ax + b$ و x ریشه معادله $4x^2 - 7x + 3$ باشد، آنگاه:

$$t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \Rightarrow \frac{16}{t^2} - \frac{14}{t} + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\times t^2} 16 - 14t + 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 14t + 16 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{مقایسه با } 3x^2 + ax + b = 0]{\text{مقایسه}} a = -14, b = 16$$

روش دوم: معادله درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده باشد (یعنی جای a و c را عوض می‌کنیم). سپس معادله درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های این معادله به دست آمده باشد (یعنی b را در ۲ و c را در ۲ ضرب می‌کنیم). $4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 16 = 0$ این معادله را با $3x^2 + ax + b = 0$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -14, b = 16$$

توجه کنید ریشه‌های معادله $cx^2 + bx + a = 0$ عکس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است و ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند.

۵۹. ۲ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$$

پس در معادله دوم، کافی است x را به $x-1$ تبدیل کنیم:

$$3(x-1)^2 + 7(x-1) + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 7x - 7 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x - 3 = 0$$

برای تبدیل معادله به حالت $x^2 + ax + b = 0$ دو طرف معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -1$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow x^2 + ax + 3 = 0 \Rightarrow 1 + a + 3 = 0 \Rightarrow a = -4 \\ x=-1 \Rightarrow x^2 + ax + 3 = 0 \Rightarrow 1 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

پس در مجموع برای a چهار مقدار متفاوت داریم.

۶۸ | ۱ از معادله $x^2 - x - 4 = 0$ یا همان $x = x^2 - 4$ داریم:

$$x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4 \end{cases}$$

حال مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$S = (x_1^3 + \frac{1}{x_2}) + (x_2^3 + \frac{1}{x_1}) = (x_1^3 + x_2^3) + (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2})$$

$$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$= 1^3 - 3(-4)(1) + \frac{1}{-4} = 1 + 12 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

$$P = (x_1^3 + \frac{1}{x_2})(x_2^3 + \frac{1}{x_1}) = (x_1 x_2)^3 + x_1^3 + x_2^3 + \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow P = (-4)^3 + (1)^3 - 2(-4) + \frac{1}{-4} = \frac{-221}{4}$$

معادله درجه دومی که ریشه‌های آن α و β باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد که $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ است.

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

۶۹ | ۱ از معادله $x^2 + x - 5 = 0$ یا همان $x = 5 - x^2$ داریم:

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -5 \end{cases}$$

حال مجموع و حاصل ضرب معادله خواسته شده را می‌نویسیم:

$$P = \frac{1}{(x_1 + 1)^3} \times \frac{1}{(x_2 + 1)^3} = \frac{1}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^3}$$

$$= \frac{1}{(-5 + (-1) + 1)^3} = \frac{-1}{125}$$

$$S = \frac{1}{(x_1 + 1)^3} + \frac{1}{(x_2 + 1)^3} = \frac{(x_1 + 1)^3 + (x_2 + 1)^3}{(x_1 + 1)^3 (x_2 + 1)^3}$$

$$= \frac{(x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + 1) + (x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1)}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^3}$$

$$= \frac{(x_1^3 + x_2^3) + 3(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) + 2}{(-5 + (-1) + 1)^3}$$

۶۳ | ۲ از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم و داریم:

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0$$

$$\begin{cases} t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \\ t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

دقت کنید که هر چهار ریشه، حقیقی هستند.

۶۴ | ۲

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a = 0 \\ x^2 - x - 2a = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{منها} (-)} 3x + 3a = 0 \Rightarrow x = -a$$

$a = 1$ یا $a = 0$: جای گذاری در معادله اول

$$\xrightarrow{a > 0} a = 1 \Rightarrow x = -1$$

۶۵ | ۱

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + k(1)^2 + m = 0 \Rightarrow k + m = -1 \\ g(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + n(1) - 1 = 0 \Rightarrow n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + k + n = -1$$

۶۶ | ۳ ابتدا دلتای هر دو معادله را به دست آورده و سپس با هم جمع

می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta_1 = b_1^2 - 4c_1 \\ \Delta_2 = b_2^2 - 4c_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = b_1^2 + b_2^2 - 4(c_1 + c_2)$$

از صورت سؤال می‌دانیم $b_1 b_2 = 2(c_1 + c_2)$ پس $b_1 b_2 = 4(c_1 + c_2)$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 = (b_1 - b_2)^2 \geq 0$$

پس:

بنابراین حداقل یکی از آن‌ها (Δ_1 یا Δ_2) مثبت یا صفر هستند.

۶۷ | ۴ اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای به عبارت $(x - a)^2$ برسیم،

نشان‌دهنده آن است که چندجمله‌ای مذکور در $x = a$ ریشه مضاعف دارد و نمودار تابع در این نقطه بر محور x مماس است. در این تست دو حالت وجود دارد؛ یا خود معادله $x^2 + ax + 3 = 0$ ریشه مضاعف دارد که در این

صورت داریم:

$$\Delta = a^2 - 12 = 0 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

و یا یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 1 = 0$ ، ریشه مضاعف معادله $x^2 + ax + 3 = 0$ نیز باشد.



$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} \\ & \Rightarrow \frac{[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ & \Rightarrow [(25 + 4)^2 - 2(4)] + [(125) - 3(-2)(5)] = (29)^2 - 8 + 155 \\ & \Rightarrow (30 - 1)^2 - 8 + 155 = 900 - 60 + 1 - 8 + 155 \\ & \Rightarrow k = 841 - 8 + 155 = 841 + 147 = 988 \end{aligned}$$

۲ ۷۳

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0. \quad (1)$$

$$\sqrt{x} = t \rightarrow mt^2 - 3t + m - 2 = 0.$$

اگر این معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، معادله (۱) فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 2$$

دقت کنید اگر معادله $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف نامنفی باشد نیز معادله (۱) فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2m} \geq 0 \Rightarrow m > 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \\ \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} > 0 \quad \checkmark \\ m = \frac{2 - \sqrt{13}}{2} < 0 \quad \times \end{cases} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب می‌شود: $0 < m < 2 \cup \left\{ \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \right\}$ که نزدیک‌ترین گزینه به جواب، گزینه (۲) می‌باشد.

۴ ۷۴

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 = 0 \\ x^3 + 7x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 = 0 \\ -x^4 - 7x^2 - x = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow -6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow 6x^2 + x + 1 = 0 \\ & \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه مشترک ندارند} \end{aligned}$$

پاسخنامه تست آزمون درس دوم (تابع درجه دوم)

۳ ۷۵

چون $a = -1$ منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x = \frac{-b}{2a} = 1$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(1) = 4$.
نقطه (۱، ۴) رأس سهمی و نقطه ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.

$$\begin{aligned} & = \frac{\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)\right) + 3\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)\right) + 3\left(\frac{-b}{a}\right) + 2}{-125} \\ & = \frac{((-1)^2 - 3(-5)(-1)) + 3((-1)^2 - 2(-5)) + 3(-1) + 2}{-125} \\ & = \frac{-16}{125} \end{aligned}$$

و براساس قاعده گفته شده در پایان پاسخ سؤال قبلی که $x^2 - Sx + P = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} x^2 - Sx + P = 0 & \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-16}{125}\right)x + \left(\frac{-1}{125}\right) = 0 \\ \times 125 & \rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0 \end{aligned}$$

۳ ۷۶ چون α و β ریشه‌های معادله هستند، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - \beta \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

حال حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^{1397}}{(\alpha - 3)^{1398}} + \frac{\alpha^{1396}}{(3 - \beta)^{1397}} = \frac{\beta^{1397}}{(-\beta)^{1398}} + \frac{\alpha^{1396}}{\alpha^{1397}} \\ & = \frac{\beta^{1397}}{\beta^{1398}} + \frac{\alpha^{1396}}{\alpha^{1397}} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

۱ ۷۱ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند:

$$\begin{aligned} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1-2m}{3} \quad \text{و} \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2-m}{3} \\ S = \frac{1}{P} \Rightarrow SP = 1 \Rightarrow \frac{1-2m}{3} \times \frac{2-m}{3} = 1 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0. \end{aligned}$$

که مقدار m برابر (-1) و $\frac{7}{2}$ است. $(a + c = b)$ اما به ازای $m = -1$ دلتای معادله کوچکتر از صفر خواهد شد و غیر قابل قبول است و در نتیجه $m = \frac{7}{2}$ می‌باشد.

۳ ۷۲

$$\alpha^2 - 5\alpha - 2 = 0, \beta^2 - 5\beta - 2 = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 5\alpha + 2 \quad (1), \beta^2 = 5\beta + 2 \quad (2)$$

در ضمن طبق روابط جمع و ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = -2 \end{cases}$$

با جای گذاری روابط (۱) و (۲) در k داریم:

$$k = \alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2(\alpha^2) + \beta^2(\beta^2) = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^3 + \beta^3$$



$$x > [x]$$



$$|x|$$

$$\sqrt{x}$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



۳ ۸۵ دهانه سهمی به طرف پایین است $a < 0 \Leftrightarrow$

نقطه برخورد سهمی با محور y ها، بالاتر از مبدأ است $c > 0 \Leftrightarrow$

۲ ۸۶ با مساوی قرار دادن دو سهمی داریم:

$$x^2 + 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

پس یک نقطه برخورد دارند.

۱ ۸۷ کافی است y_S را به دست آوریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-\frac{1}{4})} = 2 \Rightarrow y_S = \frac{-1}{4}(2)^2 + 2 \cdot 2 = -1 + 4 = 3$$

۴ ۸۸ باید صفرهای تابع $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ را بیابیم:

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = x(-\frac{1}{4}x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

پس توپ در فاصله ۴ متری به زمین می خورد.

۲ ۸۹ با توجه به شکل داریم:

$$4 = 2x + 2y \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x$$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است می توان نوشت:

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

به جای y معادل آن را بر حسب x قرار می دهیم:

$$S = x(2 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 2x$$

این تابع دارای ماکزیمم است و بیشترین مقدار آن به ازای $f(\frac{-b}{2a})$ حاصل می شود.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}} \approx 0.94 \text{ m}$$

$$y = 2 - \frac{3}{2}x \approx 2 - \frac{3}{2}(0.94) = 0.59 \text{ m} \approx 0.6 \text{ m}$$

۲ ۹۰ شرط آن که سهمی همواره پایین محور x ها باشد، آن است که:

$$\Delta < 0 \text{ و } a < 0$$

$$a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (m-3)^2 + (1-m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < m < 5 \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) به جواب $2 < m < 5$ می رسیم.

۳ ۷۶ می دانیم رأس سهمی در ضابطه سهمی صدق می کند. از طرفی

$$\text{طول رأس سهمی } x = \frac{-b}{2a} \text{ است؛ بنابراین:}$$

$$\begin{cases} S(1, -2): -2 = m(1)^2 + n(1) \Rightarrow m + n = -2 \quad (1) \\ x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-n}{2m} = 1 \Rightarrow -2m = n \Rightarrow -2m - n = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} m + n = -2 \\ -2m - n = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} -m = -2 \Rightarrow m = 2, n = -4$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = 4 + 16 = 20$$

۱ ۷۷

$$y = 4x^2 - 12x + 13 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -12 \\ c = 13 \end{cases} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$y_S = 4(\frac{3}{2})^2 - 12(\frac{3}{2}) + 13 = 4(\frac{9}{4}) - 18 + 13 = 4 \Rightarrow S(\frac{3}{2}, 4)$$

۱ ۷۸ چون $a < 0$ است، پس سهمی ماکزیمم دارد که طول آن

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} \text{ است.}$$

۳ ۷۹ در این سهمی قطعاً می توان گفت که $\Delta > 0$ و $P < 0$ است.

چون دو ریشه دارد که یکی مثبت و یکی منفی است.

۲ ۸۰ اگر $\Delta = 0$ باشد، سهمی بر محور x ها مماس است و ریشه

مضاعف دارد و اگر $S < 0$ باشد، یعنی جمع دو ریشه منفی است که در اینجا ریشه مضاعف منفی داریم.

۱ ۸۱ اگر در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $\frac{c}{a} < 0$ باشد (یعنی a

و c مختلف‌العلامت باشند)، تابع درجه دوم از هر چهار ناحیه می گذرد. بنابراین باید $m + 2 < 0$ یعنی $m < -2$ باشد.

۳ ۸۲ دهانه سهمی باید رو به بالا باشد و طول رأس سهمی عددی

منفی است ($\frac{-b}{2a} < 0$)، پس رأس سهمی، سمت چپ محور عرض‌ها می باشد.

ضمناً محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها (نقطه $(0, c)$) دارای عرض مثبت است. پس تنها گزینه (۳) می تواند نمودار این سهمی باشد.

۳ ۸۳ نقطه $(2, 3)$ رأس سهمی است، یعنی $b = 3$ و $a = 2$

می باشد؛ از طرف دیگر این سهمی از مبدأ مختصات می گذرد، پس داریم:

$$y = k(x-2)^2 + 3 \xrightarrow{(0,0)} 0 = 4k + 3 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

۴ ۸۴ طول رأس سهمی وسط صفرهای تابع f است، پس اگر $\alpha = 1$

و β صفرهای تابع باشند، آنگاه داریم:

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1 + \beta}{2} \Rightarrow 1 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = 3$$



۹۵ ۳ منحنی محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین معادله فقط یک ریشه دارد و از آنجا که $x = 1$ ریشه معادله است پس عبارت درجه دوم ریشه ندارد با ریشه مضاعف برابر با ۱ دارد.

$$x^2 - ax + a = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

با جای گذاری $x = 1$ در عبارت درجه دوم مشخص می‌شود که $x = 1$ ریشه عبارت نیست.

۹۶ ۲ روش اول: از طریق معادله درجه دوم مسأله را حل می‌کنیم:

$$محیط = 2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

$$مساحت = xy = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

چون ضریب x^2 منفی است، پس این تابع ماکزیمم دارد.

$$x = x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25 \Rightarrow \text{اختلاف ابعاد} = 25 \text{ m}$$

$$y = 100 - 2x = 100 - 2(25) = 50.$$

روش دوم: اگر $2x + y = 100$ باشد، در صورتی xy ماکزیمم است

$$(بیشترین مقدار ممکن را دارد) که، $2x = y = \frac{100}{2}$ باشد، پس $x = 25$$$

و $y = 50$ است که اختلافشان ۲۵ است.

۹۷ ۱ معادله دو ریشه منفی دارد، بنابراین $\Delta > 0$ ، $P > 0$ و $S < 0$ است.

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$\begin{cases} (1) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) = a^2 + 10a + 9 > 0 \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -9 \text{ یا } a > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2) \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) S < 0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} a + 3 < 0 \Rightarrow a < -3 \end{cases}$$

اشتراک سه شرط بالا به صورت $a < -9$ می‌باشد.

۹۸ ۱ دقت داریم که $x = 0$ یکی از ریشه‌های سهمی مورد نظر است و لذا سهمی مورد نظر حتماً از مبدأ مختصات عبور می‌کند. در ضمن به‌ازای $m = 1$ داریم:

$$y = (1-1)x^2 - (1-2)x \Rightarrow y = x \Rightarrow (\text{معادله خط})$$

لذا m نمی‌تواند مقدار ۱ را اختیار کند. $(m \neq 1)$ چون در این حالت دیگر سهمی نداریم و با یک خط سروکار داریم. حال چون $x = 0$ یک ریشه معادله است و قرار است سهمی از ناحیه دوم عبور نکند، سهمی الزاماً باید با ریشه مضاعف $x = 0$ داشته باشد و یا اینکه ریشه دیگر معادله مثبت باشد یعنی مجموع ریشه‌هایش $(-\frac{b}{a})$ بزرگتر از صفر باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-2}{1-m} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < m < 2$$

۹۱ ۱ تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره در زیر محور x ها است هرگاه $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$(1) m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$(2) \Delta < 0 \Rightarrow -4m^2 + 4m + 3 < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0.$$

$$\Delta_m = 16 + 48 = 64 \Rightarrow m = \frac{4 \pm 8}{4} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m < -\frac{1}{2}$$

۹۲ ۳ می‌دانیم تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در صورتی همواره بالای محور x ها قرار دارد که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} (1) a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 - 4(a-1)(a) < 0 \Rightarrow 8 - 4a^2 + 4a < 0 \\ \xrightarrow{\div (-4)} a^2 - a - 2 > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -1 \text{ یا } a > 2 \end{cases} (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a > 2$$

a	-1	2	
Δ	+	-	+

۹۳ ۳ هرگاه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ رو به بالا باشد $a > 0$ است و چون بر محور x ها مماس است، $\Delta = 0$ و معادله ریشه مضاعف دارد.

$$\text{شرط اول: } a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\text{شرط دوم: } \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4m^2 + 25 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \end{cases} (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m = \frac{5}{2}$$

۹۴ ۴ توجه داشته باشید شرط اینکه نمودار تابع درجه ۲ همواره بالای محور x ها قرار گیرد (همواره مثبت باشد) این است که: $\Delta < 0$ و $a > 0$

$$y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$$

$$\begin{cases} a = m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (1) \\ \Delta = 4m^2 - 4(m+2) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 8 < 0 \end{cases}$$

$$m^2 - m - 2 < 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = \frac{-c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$\Delta' > 0 \Rightarrow 4 - 2(m-2) > 0 \Rightarrow 1 > 2m \Rightarrow m < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (2)$$

$$\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{برقرار است}$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow 3 < m < \frac{1}{2}$$

۱۰۲ باید x_S را به دست آوریم که در اینجا t_S نام دارد، پس:

$$t_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1 \cdot 0}{2(-5)} = 1$$

۱۰۳ روش اول: با توجه به شکل نقاط $(2, 0)$ و $(-1, 0)$ و $(0, -1)$

را به ترتیب A و B و C می‌نامیم و در $y = ax^2 + bx + c$ قرار می‌دهیم تا ضرایب a، b و c به دست بیایند پس داریم:

$$\begin{cases} B(-1, 0) \Rightarrow a - b + c = 0 & (1) \\ C(0, -1) \Rightarrow c = -1 & \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } c = -1} \\ A(2, 0) \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ 4a + 2b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 2 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow 6a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{-1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) \quad (\text{معادله سهمی})$$

روش دوم: دقت کنید ریشه‌های سهمی $x = -1$ و $x = 2$ هستند، پس معادله کلی سهمی به صورت $y = a(x+1)(x-2)$ قابل بیان است؛ از طرفی نقطه $(0, -1)$ در سهمی صدق می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$-1 = a(1)(-2) \Rightarrow -1 = -2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1)(x-2) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) \quad \text{در نهایت داریم:}$$

توجه داشته باشید که با کمی دقت در شکل سهمی می‌توانیم درک کنیم سهمی دارای مینیمم است. پس $a > 0$ است و گزینه‌های (۱) و (۳) نمی‌توانند درست باشند، از طرفی مختصات $(0, -1)$ در گزینه (۴) صدق نمی‌کند.

۱۰۴ در نمودار این سهمی، محل تلاقی با محور x ها (ریشه‌ها) و

محل تلاقی با محور y ها مشخص شده است. در این موارد از رابطه

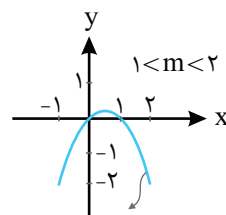
$$y = k(x - \alpha)(x - \beta)$$

است، استفاده می‌کنیم تا سریع‌تر و دقیق‌تر به معادله دست پیدا کنیم.

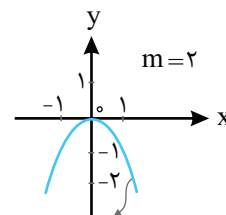
در حالت ریشه مضاعف $x = 0$ نیز، باید $m = 2$ باشد. پس در کل داریم:

$$1 < m \leq 2$$

به نمودارهای زیر توجه کنید:



$$y = (1-m)x^2 - (m-2)x$$



$$y = (1-m)x^2 - (m-2)x$$

۹۹ برای اینکه منحنی محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع کند باید این معادله درجه دوم دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد، بنابراین باید $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$x_1 x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -2 \text{ یا } m > 1$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} < 0$ است، Δ بزرگتر از صفر است و معادله قطعاً دو ریشه حقیقی متمایز دارد. پس شرط $\Delta > 0$ بررسی نمی‌گردد.

۱۰۰ مطابق صورت سؤال، منحنی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند، یعنی معادله دو ریشه منفی دارد. پس باید سه شرط $\Delta > 0$ (زیرا دو ریشه دارد) و $\frac{c}{a} > 0$ (ضرب دو عدد منفی، مثبت است) و $\frac{-b}{a} < 0$ (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.

$$y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$$

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0$$

$$\Rightarrow 4(m^2 + 2m + 1 - 12m + 24) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{5\} \quad (1)$$

$$2) \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (2)$$

$$3) \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \xrightarrow{m-2 > 0} m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \emptyset$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} > 0$ است باید شرط $\Delta > 0$ بررسی گردد. اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، آنگاه معادله دو ریشه دارد و نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست.

۱۰۱ اگر ضریب x یعنی مقدار b زوج باشد، برای راحتی می‌توان

به جای Δ از Δ' استفاده نمود.

باید معادله $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد.



گزینه (۲): $a < 0$ ، $b > 0$ و $a + \Delta \leq \Delta < 0$ منفی و قطعاً کوچکتر از یک عدد مثبت مثل b است. $(a + \Delta < b)$

گزینه (۳): $a < 0$ ، $b > 0$ و $a + \Delta \leq \Delta > 0$ ممکن است مثبت یا منفی یا صفر باشد و نمی توان گفت قطعاً بزرگتر از یک عدد مثبت مثل b است.

گزینه (۴): $a > 0$ ، $b < 0$ و $a + \Delta \leq \Delta > 0$ مثبت و b منفی، پس $a + \Delta$ قطعاً بزرگتر از یک عدد منفی مثل b است. $(a + \Delta > b)$

۱۰۹ ۲ همه گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه (۱): محل برخورد با محور y ها، مبدأ است $c = 0 \Rightarrow \Delta + c > 0 \Rightarrow$

سه می، محور x ها را در دو نقطه قطع می کند $\Delta > 0 \Rightarrow$

گزینه (۲): $c > 0$ و $\Delta + c \leq \Delta < 0$ می تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

گزینه (۳): $c > 0$ و $\Delta + c > 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$

گزینه (۴): $c > 0$ و $\Delta + c > 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$

پس فقط در نمودار گزینه (۲) امکان دارد که $\Delta + c$ منفی باشد.

۱۱۰ ۲ نمودار n : دهانه سهمی به سمت پایین است $\Leftarrow a < 0 \checkmark$

شیب خط مماس در نقطه c افقی است. $\Leftarrow b = 0 \times$

محل برخورد با محور y ها بالای مبدأ است. $\Leftarrow c > 0 \checkmark$

نمودار محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است. $\Leftarrow 2$ ریشه $\checkmark$

یک ریشه در سمت راست مبدأ و دیگری در سمت چپ مبدأ است. $\Leftarrow$ یکی

مثبت و یکی منفی است. $\checkmark$

نمودار p : $a < 0 \times$ ، $b < 0 \checkmark$ ، $c < 0 \times$ ، ریشه مضاعف $\checkmark$ ، ریشه منفی $\checkmark$.

نمودار q : $a < 0 \checkmark$ ، $b < 0 \checkmark$ ، $c < 0 \checkmark$ ، فاقد ریشه، ریشه ندارد $\checkmark$

نمودار r : $a < 0 \checkmark$ ، $b = 0 \times$ ، $c = 0 \times$ ، ۱ ریشه مضاعف $\checkmark$ ، ریشه صفر $\times$

۱۱۱ ۱ کافی است تابع درجه دوم داده شده را با نیمساز ناحیه اول

$y = x$ ($x > 0$) مساوی قرار دهیم و معادله تلاقی باید ریشه مضاعف

داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \quad \text{معادله تلاقی}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m - 24 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 12, -2$$

$$-4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m ، طول نقطه تماس مثبت است

(در ناحیه اول x مثبت است).

$$m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 13x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \text{غقیق}$$

$$m = -2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{قیق}$$

$$y = k(x - (-3))(x - (-1)) \Rightarrow y = k(x+3)(x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{سه می از } (0,3)} 3 = k(0+3)(0+1) \Rightarrow 3k = 3$$

$$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow y = (x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$$

۱۰۵ ۴ در نمودار سهمی مختصات رأس به صورت $S(2,3)$ داده شده

است، رأس سهمی در معادله سهمی صدق می کند و طول رأس نیز برابر

$x = 2$ است، پس داریم:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (1) \\ 3 = a(2)^2 + b(2) + c \quad (2) \end{cases}$$

از طرفی c محل برخورد سهمی با محور y هاست که با توجه به نمودار، $c = 1$ است.

در رابطه (۲) داریم:

$$c = 1 \Rightarrow 3 = 4a + 2b + 1 \xrightarrow{b = -4a} 3 = 4a + 2(-4a) + 1$$

$$\Rightarrow 3 = 4a - 8a + 1 \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{a = -\frac{1}{2}} \xrightarrow{(1)} b = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

۱۰۶ ۳ اگر در سهمی، محل برخورد با محور x ها یعنی x_1 و x_2 و

محل برخورد با محور y ها را داشته باشیم، مناسب تر است از رابطه زیر

استفاده کنیم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - (-1))(x - 3) \Rightarrow y = a(x+1)(x-3)$$

$$\xrightarrow{(0,-2)} -2 = a(0+1)(0-3) \Rightarrow -2 = -3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x+1)(x-3) = \frac{2}{3}(x^2 - 2x - 3) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$$

۱۰۷ ۴ نقطه برخورد با محور y ها، یعنی c برابر با ۴ است، پس

$$y = ax^2 + bx + 4$$

از طرفی دیگر، رأس سهمی $(2,0)$ است، بنابراین:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow a = \frac{-b}{4}$$

$$\text{روی نمودار } (2,0): a(2)^2 + b(2) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b = -4 \xrightarrow{a = \frac{-b}{4}} 4\left(\frac{-b}{4}\right) + 2b = -4 \Rightarrow b = -4$$

۱۰۸ ۴ همه گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه (۱): دهانه سهمی به سمت بالاست $\Leftarrow a > 0$

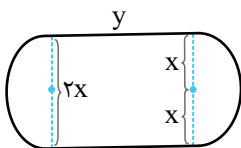
نقطه برخورد با محور y ها مثبت است $\Leftarrow c > 0$ (البته c نیازی نیست!)

شیب خط مماس در نقطه c منفی است $\Leftarrow b < 0$

نمودار، محور x ها را قطع نمی کند $\Leftarrow \Delta < 0$

$a + \Delta$ ممکن است مثبت یا منفی یا صفر باشد و نمی توان گفت قطعاً بزرگتر

از b است.



۱۱۷ ۲ در شکل روبه‌رو باید x را بیابیم.

با توجه به شکل، محیط برابر است با:

محیط دو نیم‌دایره + محیط مستطیل = محیط استادیوم

$$= 4x + 2y + 2\pi x = 1500$$

$$\Rightarrow 4x + 2y = 1500 - 2\pi x \Rightarrow y = 750 - \pi x - 2x$$

$$\Rightarrow y = 750 - (\pi + 2)x$$

از طرفی دیگر، مساحت برابر است با:

مساحت دو نیم‌دایره + مساحت مستطیل = مساحت استادیوم

$$= 2xy + \pi x^2 = 2x(750 - (\pi + 2)x) + \pi x^2$$

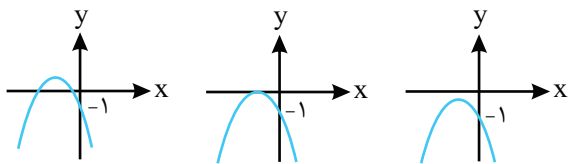
$$= 1500x - 2\pi x^2 - 4x^2 + \pi x^2 = -(\pi + 4)x^2 + 1500x$$

چون ضریب x^2 منفی است، پس این تابع ماکزیمم دارد و طول نقطهٔ ماکزیمم برابر است با:

$$x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{-2(\pi + 4)} = \frac{750}{\pi + 4}$$

۱۱۸ ۱ چون نمودار تابع از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد، نمودار این تابع به سه

حالت زیر می‌تواند باشد:



اگر دو ریشه داشته باشد، باید یکی از ریشه‌ها منفی و ریشهٔ دیگر منفی یا

صفر باشد، که داریم:

$$x^2 \text{ ضریب } < 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 6) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -6 \text{ یا } a > 2 \quad (2)$$

$$P = \alpha\beta \geq 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{a-3} \geq 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (3)$$

$$S = \alpha + \beta < 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-a}{\underbrace{a-3}_{\text{منفی}}} < 0$$

$$\Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (4)$$

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) و (۴) به صورت $a < -6$ می‌شود.

حال فرض می‌کنیم فاقد ریشه یا دارای ریشهٔ مضاعف باشد، داریم:

$$x^2 \text{ ضریب } < 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (I)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 6) \leq 0$$

$$\Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \quad (II)$$

که اشتراک (I) و (II) برابر $-6 \leq a \leq 2$ است و اجتماع این بازه با $a < -6$

می‌شود، $a \leq 2$.

۱۱۲ ۳ ابتدا معادلهٔ دو سهمی را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا نقاط

تلاقی به‌دست آید.

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = +\sqrt{2} \xrightarrow{y=x^2+1} y = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$$

$$x = -\sqrt{2} \xrightarrow{y=x^2+1} y = (-\sqrt{2})^2 + 1 = 3$$

$$\begin{cases} A = (\sqrt{2}, 3) \\ B = (-\sqrt{2}, 3) \end{cases} \quad AB = \sqrt{(\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۱۳ ۴ معادلهٔ حاصل از تلاقی منحنی و خط مورد نظر ریشهٔ حقیقی

ندارد، یعنی Δ آن منفی است؛ بنابراین داریم:

$$(2x+1)(x+8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 16x + x + 8 = mx$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow |m-17| < 8$$

$$\Rightarrow -8 < m-17 < 8 \Rightarrow 9 < m < 25$$

$$1 \quad 114 \quad y=0 \xrightarrow{y=0} 4a - ax^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

خط ترسیم شده در شکل، از دو نقطهٔ $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ عبور کرده است. پس

به وضوح $y = x + 2$ معادلهٔ خط رسم‌شده است. پس به ازای $x = 1, y = 3$ است.

$$y = 4a - ax^2 \xrightarrow{y=3, x=1} 3 = 4a - a(1)^2$$

$$\Rightarrow 3 = 3a \Rightarrow a = 1$$

دقت کنید در حل معادلهٔ (۱)، a نمی‌تواند صفر باشد، زیرا اگر $a = 0$ شود،

نمودار سهمی نیست و به خط $y = 0$ تبدیل می‌شود.

۱۱۵ ۲ دو تابع را برابر با هم قرار می‌دهیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 1 = ax^2 + 4x \Rightarrow (a-1)x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} \text{ریشهٔ مضاعف}} (4)^2 - 4(a-1)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow (4)^2 + 4(a-1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = -3$$

۱۱۶ ۳ وقتی سهمی و خط در دو نقطه تلاقی دارند، به این معناست

که دستگاه معادلهٔ جبری حاصل از حل آن‌ها، دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = 2x + k \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 4 = 2x + k$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 4 - k = 0$$

$$\Rightarrow (-2)^2 - 4(-1)(4-k) > 0 \Rightarrow 4 + 4(4-k) > 0$$

$$\Delta = 4 + 16 - 4k > 0 \Rightarrow 20 > 4k \Rightarrow k < 5$$



۱۲۲ ۳ نمودار تابع در محل برخورد با محور x ها، بر محور x ها مماس است. این نشان می‌دهد که معادله $f(x) = 0$ ، ریشه مضاعف به ازای $x = 1$ دارد (یعنی $(x-1)^2$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 3x + 5} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{ریشه مضاعف}]{(x-1)^2} x^2 + ax + b = x^2 - 2x + 1$$

$$(a, b) = (-2, 1)$$

۱۲۳ ۳ نقطه دلخواه $m \left| \frac{x}{y} \right|$ را روی منحنی $y = \sqrt{x^2 + 4}$ در نظر می‌گیریم و مطابق فرمول فاصله، فاصله نقطه m از $(1, 0)$ برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4} = \sqrt{2x^2 - 2x + 5}$$

$$\xrightarrow[\text{زیررادیکال}]{\text{مربع کامل کردن}} \sqrt{2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 5} = \sqrt{2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2}}$$

در صورتی d مینیمم می‌شود که عبارت $2(x - \frac{1}{2})^2$ برابر با صفر شود.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow d_{\min} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

۱۲۴ ۲ روش اول: طول رأس سهمی برابر با (-1) است، یعنی:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow -b = -2a \Rightarrow 2a = b \quad (1)$$

نقطه $A(-1, 9)$ رأس سهمی است، یعنی روی سهمی قرار دارد، پس:

$$a(-1)^2 + b(-1) + c = 9 \Rightarrow a - b + c = 9 \quad (2)$$

سهمی از نقطه $(3, 1)$ می‌گذرد، پس:

$$a(3)^2 + b(3) + c = 1 \Rightarrow 9a + 3b + c = 1 \quad (3)$$

معادله (1) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم:

$$a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} a - 2a + c = 9 \Rightarrow -a + c = 9$$

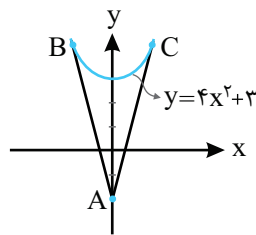
$$9a + 3b + c = 1 \xrightarrow{b=2a} 9a + 6a + c = 1 \Rightarrow 15a + c = 1$$

$$\begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = -9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow 16a = -8 \Rightarrow a = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$$

و در نتیجه $c = \frac{17}{2}$ می‌شود.

و چون $b = 2a$ است $b = 2(\frac{-1}{2}) = -1$.

۱۱۹ ۱ فرض می‌کنیم معادله خطوط مماس به صورت $y = mx + h$ باشند، داریم:



$$y = mx + h, A(0, -2) \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{h=-2} y = mx - 2$$

از تقاطع خط و سهمی باید ریشه مضاعف داشته باشیم:

$$mx - 2 = 4x^2 + 3 \Rightarrow 4x^2 - mx + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} \Delta = m^2 - (4)(4)(5) \Rightarrow m^2 - 80 = 0 \Rightarrow m = \pm 4\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} y = 4\sqrt{5}x - 2 \\ y = -4\sqrt{5}x - 2 \end{cases} \text{ معادله خطوط مماس}$$

حال، مختصات تلاقی خطوط مماس با منحنی را به دست می‌آوریم:

$$1) 4\sqrt{5}x - 2 = 4x^2 + 3$$

$$4x^2 - 4\sqrt{5}x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (2x - \sqrt{5})^2 = 0$$

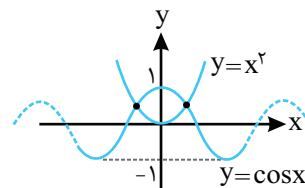
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{طول نقطه } C$$

$$2) -4\sqrt{5}x - 2 = 4x^2 + 3 \Rightarrow 4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (2x + \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{طول نقطه } B$$

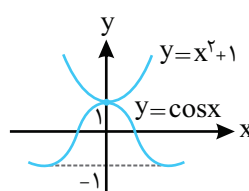
$$|BC| = |x_C - x_B| = \left| \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| = \sqrt{5}$$

۱۲۰ ۳ باید $x^2 = \cos x$ را حل کنیم که با رسم نمودارهای آن‌ها داریم:



پس در دو نقطه متقاطع‌اند.

۱۲۱ ۲ باید $x^2 + 1 = \cos x$ را حل کنیم که با رسم نمودارهای آن‌ها داریم:



پس در یک نقطه با هم برخورد دارند.

۴ ۱ اگر (k, h) مختصات رأس سهمی باشد، آنگاه سهمی به صورت $y = a(x - k)^2 + h$ است. پس کافی است طول رأس سهمی را بیابیم و می‌دانیم طول رأس سهمی میانگین x هایی از سهمی است که عرض‌های برابر دارند، که در این جا نقاط $(0, 3)$ و $(2, 3)$ هستند، بنابراین:

$$k = x_S = \frac{0+2}{2} = 1$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ یک ریشه مضاعف

$\Delta + S + P > 0 \Rightarrow S > 0$ (مجموع ریشه‌ها (ریشه مضاعف)

$P > 0 \Rightarrow$ حاصل ضرب ریشه‌ها (یک ریشه مضاعف)

۶ ۲ با مساوی قرار دادن دو سهمی با یکدیگر داریم:

$$x^2 + x - 1 = x^2 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس یک نقطه برخورد دارند.

$$\alpha^2 - 5\alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\div \alpha} \alpha - 5 - \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - \frac{1}{\alpha} = 5 \Rightarrow (\alpha - \frac{1}{\alpha})^2 = 25 \quad (1)$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{\beta} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{1}{\beta^2} = 0 \quad (2) \xrightarrow{(2), (1)} A = 25 + 0 = 25$$

البته اولی را هم می‌توانستیم از همین ضرب ریشه‌ها و سپس جمع آن‌ها به‌دست آوریم.

$$\alpha\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{\alpha} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha - \frac{1}{\alpha} = \frac{-b}{a} = 5$$

۸ ۱ روش اول: اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 4 = 0$ برابر x_1 و x_2 و ریشه‌های معادله جدید α و β باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha + \beta = x_1 + 2 + x_2 + 2 = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2} \\ P' = \alpha\beta = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 7 \end{cases}$$

پس معادله جدید به صورت $x^2 - S'x + P' = x^2 - \frac{13}{2}x + 7 = 0$ یا هر مضرب غیرصفر از آن است، پس معادله را در دو ضرب می‌کنیم، داریم:

$$x^2 - \frac{13}{2}x + 7 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 13x + 14 = 0$$

روش دوم: با تبدیل x به $x - 2$ داریم:

$$2(x - 2)^2 - 5(x - 2) - 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 4) - 5x + 10 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 14 = 0$$

بنابراین $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 9$ یا $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ که از نقطه $(-9, 5)$ می‌گذرد.

روش دوم: معادله سهمی به صورت $y = k(x + 1)^2 + 9$ است که از $(3, 1)$ می‌گذرد.

$$1 = k(3 + 1)^2 + 9 \Rightarrow 16k + 9 = 1 \Rightarrow k = \frac{-1}{4}$$

که $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 9$ و با جای گذاری نقطه‌ها فقط از نقطه $(5, -9)$ می‌گذرد.

۱۲۵ ۱ نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ در معادله

$y = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند.

$$(0, 5): a(0)^2 + b(0) + c = 5 \Rightarrow c = 5$$

پس سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + 5$ است.

$$(-2, 5): a(-2)^2 + b(-2) + 5 = 5 \Rightarrow 4a - 2b = 0$$

$$(1, 11): a(1)^2 + b(1) + 5 = 11 \Rightarrow a + b = 6$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4$$

در نتیجه $y = 2x^2 + 4x + 5$ و با امتحان گزینه‌ها به جواب $(-1, 3)$ می‌رسیم.

پاسخنامه تشریحی آزمون جامع فصل ششم

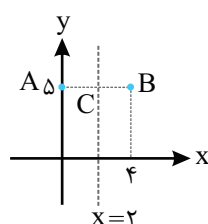
۱ ۳ این معادله را به روش مربع کامل، حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 &= 3^4 \Rightarrow (2x - 1)^2 = (3^2)^2 \\ \Rightarrow 2x - 1 &= \pm 3^2 = \pm 9 \Rightarrow 2x = 1 \pm 9 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 9}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1+9}{2} = 5 \text{ و } x_2 = \frac{1-9}{2} = -4 \end{aligned}$$

۲ ۲ در تابع درجه دو، دو ریشه در صورتی معکوس همدیگر هستند که $a = c$ باشد، پس $m = -1$ است. توجه داشته باشید که در این حالت $\Delta > 0$ است، یعنی:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-1)(-1) = 5 > 0$$

۳ ۲ چون دو نقطه A و B ، عرض‌های مساوی دارند، نقطه C وسط AB روی محور تقارن است.

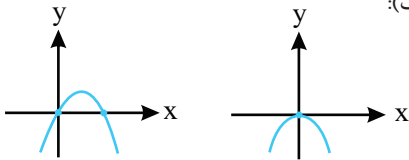


$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

پس $x = 2$ معادله خط تقارن سهمی است.



۲ ۱۳ برای اینکه منحنی از ناحیه دوم عبور نکند، باید این سهمی رو به پایین رسم شود، یعنی $a < 0$ باشد، پس سهمی به یکی از صورت‌های زیر است (صفر ریشه معادله است):



$$y = ax^2 - (a+2)x = 0 \Rightarrow x(ax - (a+2)) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{a+2}{a}$$

همان‌طور که از سهمی‌ها معلوم است، ریشه دیگر باید صفر یا مثبت باشد،

$$x = \frac{a+2}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} a+2 \leq 0 \Rightarrow a \leq -2$$

بنابراین:

۲ ۱۴

دهانه سهمی به سمت بالا است. $a > 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow c < 0$
نقطه برخورد با محور y ها پایین‌تر از مبدأ می‌باشد.

شیب خط مماس در c مثبت است. $b > 0 \Leftrightarrow b + \Delta > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$
سهمی، محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است.

۴ ۱۵ ابتدا توجه داشته باشید که $S = \frac{-b}{a} = 3$ و $P = \frac{c}{a} = -2$ و همچنین ریشه‌های معادله α و β در معادله صدق می‌کنند، پس:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 2\alpha + 1$$

به طریق مشابه، $\beta^3 - 3\beta^2 + 1 = 2\beta + 1$ برقرار است.

$$(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1)(\beta^3 - 3\beta^2 + 1) = (2\alpha + 1)(2\beta + 1)$$

$$= 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = 4P + 2S + 1$$

$$\alpha^4\beta + \alpha\beta^4 - 3\alpha\beta = \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) - 3\alpha\beta$$

$$= P(S^3 - 3PS) - 2P$$

$$A = \frac{P(S^3 - 3PS) - 2P}{4P + 2S + 1} = \frac{-2(27 - 3(-2)(3)) - 3(-2)}{4(-2) + 2(3) + 1}$$

$$= \frac{-84}{-1} = 84$$

۲ ۱۶ ریشه‌های این معادله باید دویهدو قرینه باشند، پس ریشه‌های معادله $\pm\alpha$ و $\pm\beta$ هستند. اگر α و β را دو ریشه مثبت در نظر بگیریم که $\alpha > \beta$ باشد، آنگاه داریم:

$$-\alpha < -\beta < \beta < \alpha \xrightarrow{\beta \text{ واسطه حسابی } \alpha \text{ و } -\beta \text{ است}}$$

$$\beta = \frac{\alpha + (-\beta)}{2} \Rightarrow 2\beta = \alpha - \beta \Rightarrow 3\beta = \alpha$$

۲ ۹ با استفاده از تغییر متغیر $t = x^2 - x^4$ داریم:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} t = 1 \text{ یا } t = \frac{c}{a} = 2$$

$$t = 1: 2x^4 - x^2 = 1 \Rightarrow 2x^4 - x^2 - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0, t'=x^2} \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ جواب ندارد}$$

$$t = 2: 2x^4 - x^2 = 2 \Rightarrow 2x^4 - x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=17, t'=x^2}$$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ جواب ندارد} \\ x^2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{4}} \end{cases}$$

۲ ۱۰ ابتدا ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 3 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1 \text{ و } x_2 = \frac{c}{a} = -3$$

هر کدام از این دو ریشه که در معادله $x^3 + x^2 + 7x - 9 = 0$ صدق کنند،

ریشه مشترک محسوب می‌شوند. $x = 1: x^3 + x^2 + 7x - 9 = 0$

$$\xrightarrow{(1)^3 + (1)^2 + 7(1) - 9 = 0} x = 1 \text{ ریشه این معادله است.}$$

$$x = -3: (-3)^3 + (-3)^2 + 7(-3) - 9 = -27 + 9 - 21 - 9 = -48 \neq 0$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ ریشه این معادله نیست.}$$

بنابراین تنها ریشه مشترک $x = 1$ است.

۳ ۱۱ باید $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ باشد، پس:

$$\Delta = (-m)^2 - 4(1)(m - 3) = m^2 - 4m + 12 > 0$$

$$\xrightarrow{\Delta < 0, a > 0} m \in \mathbb{R} \text{ همواره مثبت}$$

$$S = \frac{-b}{a} = m > 0 \text{ و } P = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{1} > 0 \Rightarrow m > 3$$

اشتراک هر سه شرط برابر با $m > 3$ است.

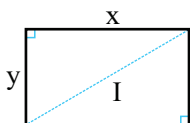
۴ ۱۲ (محل برخورد با محور y ها) $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow a = 4$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow c = 3 \text{ (خط تقارن سهمی)}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 4$$

$$\Rightarrow b = 2, d = 4 \text{ ریشه‌های معادله}$$

$$\text{پس } a + b + c + d = 4 + 2 + 3 + 4 = 13$$



۱۹ ۲ با توجه به شکل و محیط مستطیل داریم:

$$2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y=15 \Rightarrow y=15-x$$

$$I^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (15-x)^2 = 2x^2 - 30x + 225$$

که کمترین مقدار I^2 برابر است با:

$$\frac{-\Delta}{2a} = \frac{4(2)(225) - (-30)^2}{4(2)} = \frac{1800 - 900}{8} = \frac{900}{8} = \frac{225}{2}$$

بنابراین $I^2 \geq \frac{225}{2}$ و داریم: (چون $I > 0$ است)

$$I \geq \sqrt{\frac{225}{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10.61$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^2 - 5x - 1 = -x^2 - x - k$$

۲۰ ۱

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + k - 1 = 0$$

باید $\Delta = 0$ باشد تا در یک نقطه همدیگر را قطع کنند.

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(k-1) = 0 \Rightarrow 16 - 8k + 8 = 0$$

$$= 24 - 8k = 0 \Rightarrow k = 3$$

پس $h(x) = 2x^2 - 3x - 2$ و داریم:

$$2x^2 - 3x - 2 = \frac{1}{2}(2x-4)(2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -\frac{1}{2}$$

۱۷ ۱ چون سهمی رو به بالاست و عدد یک خارج از ریشه است،

پس $f(1) > 0$:

$$\begin{cases} af(1) > 0 \Rightarrow 2(2(1)^2 + (1) - m) = 2(3 - m) > 0 \Rightarrow m < 3 \\ \Delta > 0 \Rightarrow (1)^2 - 4(2)(-m) = 1 + 8m > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{8} < m < 3$$

۱۸ ۳ برای پیدا کردن معادله جدید دو روش داریم:

روش اول: با تبدیل X به $-x + 5$ معادله جدید به دست می آید.

$$(X = -x + 5 \Rightarrow x = 5 - X)$$

$$m(5 - X)^2 - 2(5 - X) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow m(X^2 - 10X + 25) - 10 + 2X + 1 = 0$$

$$\Rightarrow mX^2 - (10m - 2)X + 25m - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{10m - 2}{m}$$

روش دوم: اگر ریشه‌های معادله $mx^2 - 2x + 1 = 0$ برابر x_1 و x_2

باشند، آنگاه:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2}{m}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{m}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله جدید باشند، آنگاه:

$$S' = \alpha + \beta = -x_1 + 5 - x_2 + 5 = -(x_1 + x_2) + 10$$

$$= -\left(\frac{2}{m}\right) + 10 = \frac{10m - 2}{m}$$

اکنون مجموع ریشه‌های معادله جدید از هر دو روش $\frac{10m - 2}{m}$ یا

$$\frac{2(5m - 1)}{m} \text{ است، بنابراین:}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{2(5m - 1)}{m}}{\frac{2}{m}} = 5m - 1$$

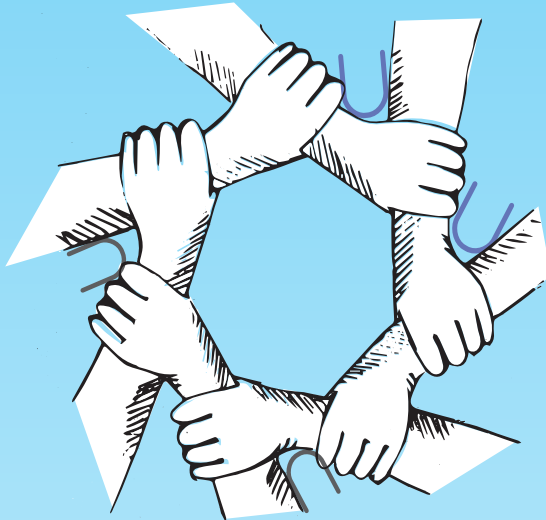


فیلم‌های آموزشی

فصل اول

مجموعه

فصل مشترک ما عشق است؛ همین است که
اختلافمان مجموعه‌ای تهی است.

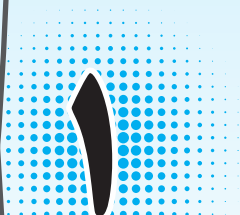


نمای کلی فصل

- درس اول؛ مفهوم مجموعه: مفاهیم اولیه / مجموعه اعداد معروف / مجموعه‌های متناهی و نامتناهی / بازه‌ها
- درس دوم؛ متمم یک مجموعه: مجموعه مرجع و مجموعه متمم / تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۱) درس‌های ۱ و ۲
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۲)؛ الگو و دنباله / فصل (۱۷)؛ احتمال
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۱ تا ۱ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۱ تست



این درس از چهار مبحث «مفاهیم اولیه»، «مجموعه اعداد معروف»، «مجموعه های متناهی و نامتناهی» و «بازه ها» تشکیل شده است.

مفاهیم اولیه

درس آموز

مجموعه: به دسته یا گروهی از اشیای کاملاً مشخص، مجموعه گفته می شود. (به جز مجموعه تهی که یک مجموعه است ولی هیچ عضوی ندارد). توجه کنید که در یک مجموعه، عضوهای آن کاملاً مشخص شده اند. به عنوان مثال اعداد طبیعی کمتر از ۵، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ یک مجموعه است. زیرا اعضای آن دقیقاً مشخص شده است.

اما ۳ شاعر نامدار ایرانی یک مجموعه نیست چون اعضای آن کاملاً مشخص نیست.

مجموعه تهی: به مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد تهی می گوئیم و این مجموعه را با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می دهیم.

دقت کنید که $\emptyset$ با $\{\emptyset\}$ متفاوت است. $\emptyset$ هیچ عضوی ندارد ولی $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو است.

عضویت: اگر a عضو مجموعه A باشد، این مطلب را به صورت $a \in A$ نمایش می دهیم.

زیرمجموعه: مجموعه A را زیرمجموعه B گوئیم اگر هر عضو A ، عضو B باشد و این مطلب را به صورت $A \subseteq B$ نشان می دهیم.

تساوی دو مجموعه: دو مجموعه A و B با هم مساوی هستند اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد.

بچه ها دقت کنید! مجموعه تهی اصلاً هیچ عضوی ندارد ولی زیرمجموعه همه مجموعه هاس. پس تعریف زیرمجموعه که در بالا گفتیم همیشه درست به جز مابرای تهی!!

مثال آموز: مجموعه $A = \{a, b, \{a\}\}$ را در نظر می گیریم. این مجموعه دارای ۳ عضو است می گوئیم: $a \in A, b \in A, \{a\} \in A$

می باشد. اگر هر کدام از عضوها را داخل یک علامت مجموعه $\{\}$ قرار دهیم، یک زیرمجموعه یک عضوی مشخص می شود:

$a \in A, \{a\} \subseteq A$

$b \in A, \{b\} \subseteq A$

$\{a\} \in A, \{\{a\}\} \subseteq A$

تست آموز: تعداد عضوهای مجموعه $A = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\}\}\}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: می دانیم $\{\} = \emptyset$ می باشد بنابراین $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$ و می دانیم تکرار عضو در مجموعه مهم نیست در نتیجه:

$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

در نتیجه A ، ۲ عضو دارد. گزینه «۲»

تست آموز: مجموعه های $A = \{2\}$ و $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ مفروضند. کدام رابطه نادرست است؟

$B \in C$ (۴)

$A \in B$ (۳)

$A \subseteq B$ (۲)

$B \subseteq C$ (۱)

پاسخ:

$B = \{2, \{2\}\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \in B, \{2\} \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \\ \{2\} \in B \Rightarrow A \in B \end{cases}$ گزینه های (۲) و (۳) درست هستند.

$C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\} \Rightarrow \{2, \{2\}\} = B \in C$ گزینه (۴) درست است.

گزینه (۱) نادرست است. گزینه «۱»

یک مجموعه را می توان با اعضا و یا با زبان و نماد ریاضی و نمودار ون و توصیف مجموعه نمایش داد.

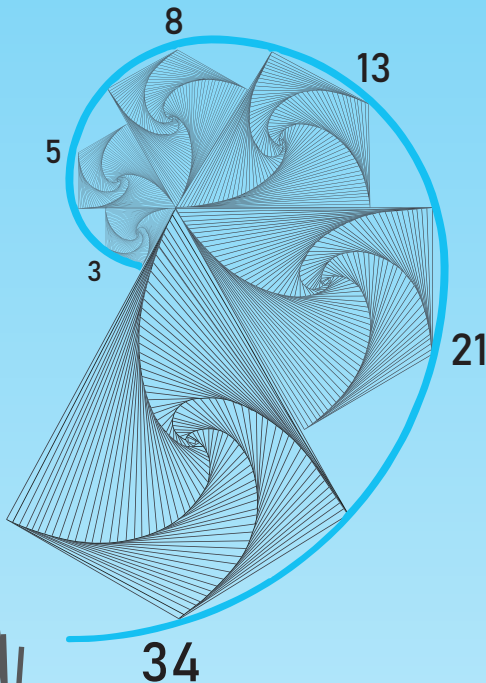


فیلم‌های آموزشی

فصل دوم

الگو و دنباله

جهان آلودی تکرار شونده از دنباله ابروان توسط
که مرا به بی نهایت می‌کشند.

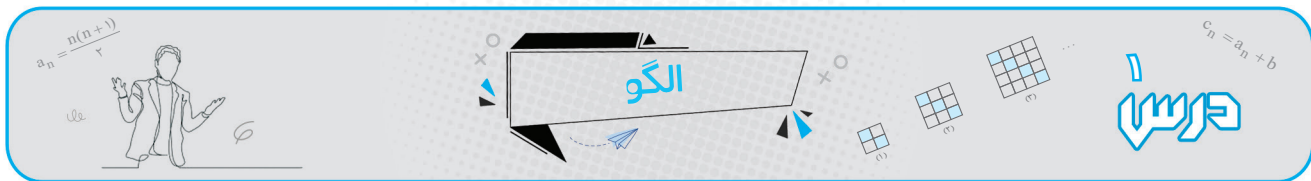


نمای کلی فصل

- درس اول؛ الگو: الگوی خطی / الگوی غیرخطی
- درس دوم؛ دنباله: تعریف دنباله / دنباله‌های درجه دوم / دنباله‌های بازگشتی
- درس سوم؛ انواع دنباله: دنباله‌های حسابی / دنباله‌های هندسی

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۱) درس‌های ۳ و ۴
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۱)؛ مجموعه
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۰ تا ۱ تست



این درس از دو مبحث «الگوی خطی» و «الگوی غیرخطی» تشکیل شده است.



الگوی خطی

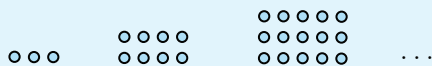
درس آموز

رشته اعداد $1, 4, 7, 10, \dots$ را در نظر بگیرید. با دقت در این رشته اعداد، می‌بینیم که جمله اول برابر ۱ است و جمله دوم، با اضافه کردن ۳ واحد به جمله اول، و جمله سوم، با اضافه کردن ۳ واحد به جمله دوم و ... و جمله n ام، با اضافه کردن ۳ واحد به جمله $(n-1)$ ام به دست آمده است. در واقع، اگر به هر عدد، ۳ واحد اضافه کنیم، عدد بعدی حاصل می‌شود. به این رشته اعداد، یک الگو می‌گوییم. اکنون می‌خواهیم الگوی این رشته اعداد را پیدا کنیم:

شماره مرحله n	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد کل عدد (n ام)	۱	۴	۷	۱۰	...	$3n - 2$
الگو	۱	$1+3$	$1+2 \times 3$	$1+3 \times 3$	...	$1 + (n-1) \times 3$

بنابراین، این رشته اعداد، دارای الگوی $a_n = 1 + 3(n-1)$ می‌باشند که در آن جمله n ام الگو را با a_n نشان می‌دهیم و با داشتن فرمول a_n می‌توان هر جمله از الگو را محاسبه کرد.

مثال آموز: در الگوی شکل زیر، شکل ششم از چند دایره تشکیل شده است؟



پاسخ: در مرحله اول، یک سطر با ۳ دایره، در مرحله دوم، ۲ سطر با ۴ دایره و در مرحله سوم، ۳ سطر با ۵ دایره وجود دارد.

شماره مرحله n	۱	۲	۳	...	n
a_n (تعداد دایره‌ها)	۳	۸	۱۵	...	
الگو (رابطه n و a_n)	1×3	2×4	3×5	...	$n \times (n+2)$

بنابراین، جمله عددی الگو، $a_n = n \times (n+2)$ می‌باشد و تعداد دایره‌ها در مرحله ششم برابر است با: $a_6 = 6 \times 8 = 48$

الگو: یک رشته از اعداد یا طرح هندسی که اعداد آن یا تعداد اعضای آن در هر مرحله از قاعده معینی برحسب شماره مرحله پیروی کنند، یک الگو نامیده می‌شود که جمله عمومی آن، یک فرمول ریاضی برحسب n است.

الگوی خطی: اگر مقدار افزایش یا کاهش جملات یک الگو، تعداد ثابتی باشد، الگو را خطی می‌نامیم که جمله عمومی آن به صورت $c_n = an + b$ می‌باشد.

اختلاف هر دو جمله متوالی یک الگوی خطی، برابر با a است.

مثال آموز: جمله عمومی الگوی خطی در اعداد $3, 1, 5, 9, \dots$ را به دست آورید؟

پاسخ: اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۴ است بنابراین جمله عمومی برابر $c_n = 4n + b$ است. از طرف دیگر، جمله اول برابر ۳- است. پس اگر در جمله عمومی، n را برابر ۱ قرار دهیم، عدد ۳- به دست می‌آید:

$$n=1 \Rightarrow -3 = 4(1) + b \Rightarrow b = -7 \Rightarrow c_n = 4n - 7$$

تست آموز: جمله دهم الگوی خطی اعداد $2, 7, 12, 17, \dots$ کدام است؟

۴۴ (۴)

۴۷ (۳)

۴۶ (۲)

۴۵ (۱)

پاسخ: اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۵ است. در نتیجه جمله عمومی برابر با $c_n = 5n + b$ می‌باشد. اگر $n=1$ را در جمله عمومی قرار دهیم، عدد ۲ به دست می‌آید:

$$n=1 \Rightarrow c_n = 2 = 5 \times 1 + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow c_n = 5n - 3 \Rightarrow c_{10} = 5 \times 10 - 3 = 47 \quad \text{گزینه «۳»}$$





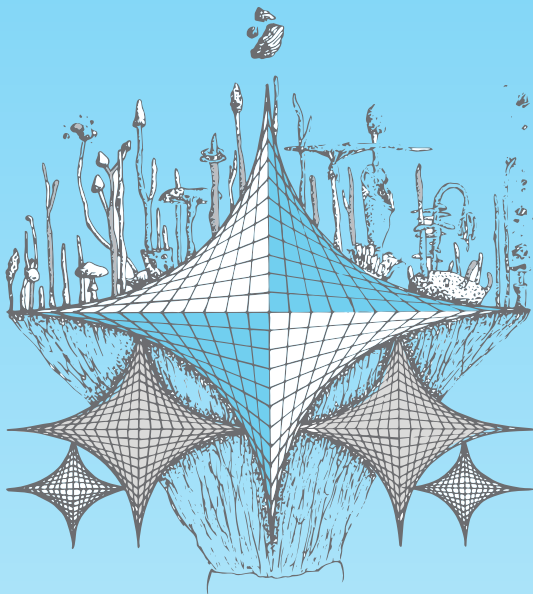
فیلم‌های آموزشی

سوم

فصل

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

تورا در پیچیده‌ترین حالت می‌خواهم؛ تجزیه
که نمی‌کنمت هیچ، به توان می‌رسانمت.



نمای کلی فصل

- درس اول؛ ریشه و توان: ریشه n ام و رابطه آن با توان / مقایسه ریشه‌ها و توان‌های اعداد / عبارت $\sqrt[n]{a}$ و تفاوت آن با $(\sqrt[n]{a})^n$
- درس دوم؛ توان‌های گویا: مفهوم توان و ارتباط آن با رادیکال / رادیکال‌ها و ویژگی‌های آن‌ها / ساده کردن رادیکال‌های به شکل $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$
- درس سوم؛ عبارت‌های جبری: اتحاد / تجزیه / ساده کردن کسرها / گویا کردن مخرج کسرها

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۳)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
- ✓ کاربردهای فصل: اغلب فصل‌ها
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۰ تا ۱ تست / غیرمستقیم: ۴ تا ۷ تست



این درس از سه مبحث «ریشه n ام و رابطه آن با توان»، «مقایسه ریشه‌ها و توان‌های اعداد» و «عبارت $\sqrt[n]{a^n}$ و تفاوت آن با $(\sqrt[n]{a})^n$ » تشکیل شده است.



ریشه n ام و رابطه آن با توان

درس‌آموز

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a$.

۴ ریشه دوم (۱۶) است $\Leftrightarrow 16 = 4^2$

-۴ ریشه دوم (۱۶) است $\Leftrightarrow 16 = (-4)^2$

پس ۴ و -۴ ریشه‌های دوم ۱۶ هستند. یعنی عدد ۱۶ دو تا ریشه دوم دارد. یکی مثبت (۴) و یکی منفی (-۴).

😊 همیشه گفت ریشه‌های دوم ۱۶ میشن $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ همین‌ا حالا بریم سراغ ریشه‌های فرد مثل ریشه سوم!

۲ ریشه سوم ۸ است $\Leftrightarrow 8 = 2^3$

پس فقط عدد ۲ ریشه سوم ۸ است.

(-۲) ریشه سوم -۸ است $\Leftrightarrow -8 = (-2)^3$

پس فقط عدد (-۲) ریشه سوم (-۸) است.

با توجه به موارد بالا نتیجه می‌گیریم:

(الف) هر عدد مثبت a دارای دو ریشه زوج ($n = 2, 4, \dots$) و قرینه به صورت $\pm \sqrt[n]{a}$ است. (ریشه زوج صفر برابر با خود صفر است)

(ب) عددهای منفی، ریشه زوج (دوم، چهارم و ...) ندارند. (مثلاً برای ریشه دوم -۴، $-\sqrt{-4}$ را در نظر نمی‌گیریم زیرا تعریف نشده است)

(پ) اگر n عددی فرد باشد هر عدد مثبت، صفر یا منفی فقط یک ریشه n ام دارد که برابر با $\sqrt[n]{a}$ است. اگر a مثبت باشد ریشه n ام a (یعنی $\sqrt[n]{a}$) مثبت است.

اگر a برابر با صفر باشد ریشه n ام صفر برابر با صفر است و اگر a منفی باشد ریشه n ام a (یعنی $\sqrt[n]{a}$) نیز منفی است.

📝 **تست‌آموز:** اختلاف ریشه‌های دوم و سوم عدد ۶۴ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: ریشه‌های دوم عدد ۶۴ برابر است با $\pm\sqrt{64}$ یعنی ± 8 و ریشه سوم عدد ۶۴ برابر است با $\sqrt[3]{64} = 4$ یعنی ۴ و اختلاف آن‌ها می‌تواند $8 - 4 = 4$

یا $12 = (-8) - (-4)$ باشد. که در بین گزینه‌ها فقط ۱۲ وجود دارد. گزینه «۳»

می‌دانیم $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ ، $\sqrt[5]{-0.00001} = -0.01$ و $\sqrt{-25}$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است. اما اعدادی مانند $\sqrt[3]{24}$ که یک عدد حقیقی

گنگ است و هیچ‌گاه مقدار دقیق آن را نمی‌دانیم، بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

$$8 < 24 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{27} \xrightarrow[3^3=27]{2^3=8} 2 < \sqrt[3]{24} < 3$$

و اکنون تقریب $\sqrt[3]{24}$ تا یک رقم اعشار: عدد ۲۴ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس با استفاده از ۲۷ و فرمول $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$ تقریب می‌زنیم:

$$24 = 27 - 3 \xrightarrow[3^3=27]{2^3=8} \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 - 3} = 3 + \frac{-3}{3 \times 3^{3-1}} = 3 - \frac{3}{3 \times 9} = 3 - \frac{1}{9} \approx 2.9$$

حالا تقریب $\sqrt[4]{21}$ تا یک رقمی اعشار با استفاده از فرمول $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$

$$16 < 21 < 81 \xrightarrow[21=16+5]{2^4=16 \text{ به } 21 \text{ نزدیک‌تر است}} \sqrt[4]{21} = \sqrt[4]{16 + 5} = 2 + \frac{5}{4 \times 2^3} = 2 + \frac{5}{32} \approx 2.1$$

ممکن است از ما بخواهند که ریشه n ام یک عدد را تقریب بزنیم.



فیلم‌های آموزشی

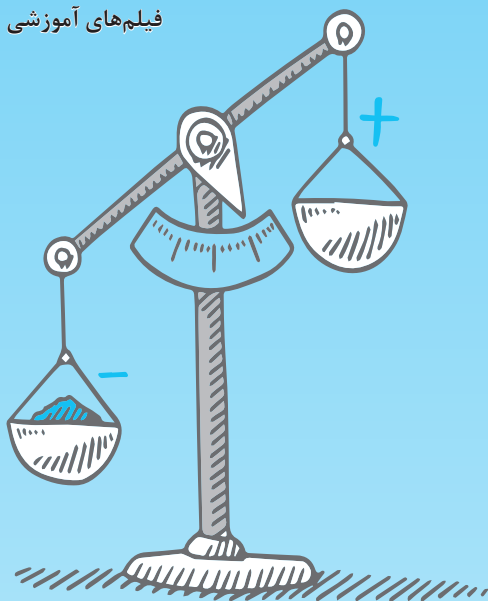
چهارم

فصل

تعیین علامت و نامعادله

«نم» نیار؛ تعیین علامت کن.

حل می‌شود.



نمای کلی فصل

● **درس اول؛ تعیین علامت:** تعریف و تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول / تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم / روش کلی تعیین علامت

● **درس دوم؛ نامعادله:** نامعادله درجه اول / نامعادله‌های دوگانه و دستگاه نامعادلات / نامعادله‌های قدر مطلق نامعادله درجه دوم

محتوا و جایگاه

✓ **شامل:** ریاضی دهم، فصل (۴) درس ۳

✓ **پیش‌نیازهای فصل:** فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۶)؛ معادله و تابع درجه دوم

✓ **کاربردهای فصل:** فصل (۵)؛ معادله‌های گویا و رادیکالی / فصل (۸)؛ تابع قدر مطلق و جزء صحیح / فصل (۱۹)؛ تابع / فصل (۱۲)؛ مثلثات

✓ **بودجه‌بندی کنگور:** مستقیم: ۱ تا ۲ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۴ تست

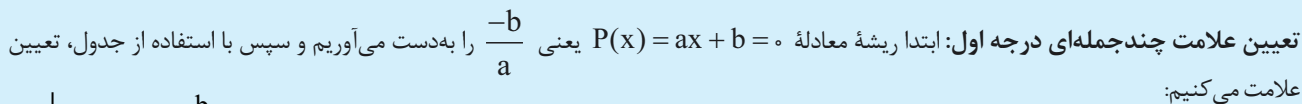
۴

لوح برتر انتخاب برترین‌ها



درس آموز

به نمودار آن توجه کنید:



x	$\frac{-b}{a}$
y	موافق علامت a مخالف علامت a

مثال آموز:

سمت پپ مثبت $\Rightarrow$ سمت، است منفی $\Rightarrow Q(\circ) = \frac{-6}{5} < 0 \Rightarrow$ سمت، است منفی



فیلم‌های آموزشی

پنجم

فصل

معادله‌های گویا و رادیکالی



اگر خوب نگاه کنی، چهره‌ام گویای
این است: عشق تو در قلبم ریشه دوانده.

نمای کلی فصل

- درس اول؛ معادله‌های گویا: روش‌های حل یک معادله گویا / مستطیل طلایی / معادله‌های گویا در مسائل
- درس دوم؛ معادله‌های رادیکالی: روش‌های حل یک معادله رادیکالی

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی یازدهم، فصل (۱) درس ۳
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۴)؛ تعیین علامت و نامعادله
- ✓ کاربردهای فصل: اغلب فصل‌ها
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۱ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۲ تست





این درس از سه مبحث «روش‌های حل یک معادله گویا»، «مستطیل طلایی» و «معادله‌های گویا در مسائل» تشکیل شده است.



روش‌های حل یک معادله گویا

درس‌آموز

معادلات گویا، معادلاتی هستند که از تقسیم دو چندجمله‌ای بر هم تشکیل شده‌اند. روش حل معادلات گویا: (۱) مخرج‌ها را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم. (۲) ک.م.م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم. (۳) ک.م.م را در صورت کسرهای ضرب می‌کنیم تا مخرج را از بین برده و معادله از حالت کسری خارج شود. (۴) معادله را حل می‌کنیم. (۵) دقت کنید اگر جواب (جواب‌های) به دست آمده، مخرج کسر را صفر کنند، قابل قبول نمی‌باشد (نمی‌باشند).

جواب‌های به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسر را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.



تست‌آموز: کدام یک در مورد معادله $\frac{2x}{2x-1} - \frac{x+5}{x+1} = \frac{x+4}{2x^2+x-1}$ درست است؟



(۱) جواب ندارد. (۲) فقط یک جواب دارد. (۳) دو جواب مثبت دارد. (۴) دو جواب منفی دارد.

پاسخ: باتوجه به رابطه $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$ ، ک.م.م مخرج‌ها $(2x - 1)(x + 1)$ است و با ضرب آن در دو طرف تساوی داریم:

$$\frac{x(2x-1)(x+1)}{2x-1} \rightarrow \frac{2x(2x-1)(x+1)}{2x-1} - \frac{(x+5)(2x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{(x+4)(2x-1)(x+1)}{(2x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 2x(x+1) - (x+5)(2x-1) = x+4 \Rightarrow 2x^2 + 2x - (2x^2 - x + 10x - 5) = x+4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 2x^2 - x + 5 = x+4 \Rightarrow -x + 5 = x+4 \Rightarrow -x - x = 4 - 5 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

و این جواب هیچ کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است، یعنی معادله فقط یک جواب دارد. گزینه «۲»

ریشه‌های معادله گویا مانند هر معادله دیگر در خود معادله صدق می‌کند.



تست‌آموز: اگر $x = 2$ ریشه معادله $\frac{3x+k}{x^2+3x} + \frac{2x+1}{x+3} = \frac{x+2}{x}$ باشد، اختلاف ریشه دیگر و k کدام است؟



(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

پاسخ: روش اول: $x = 2$ در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\frac{3(2)+k}{(2)^2+3(2)} + \frac{2(2)+1}{2+3} = \frac{2+2}{2} \Rightarrow \frac{6+k}{10} + \frac{5}{5} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{6+k}{10} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{6+k}{10} = 1 \Rightarrow 6+k = 10 \Rightarrow k = 4$$

بنابراین معادله به صورت $\frac{3x+4}{x^2+3x} + \frac{2x+1}{x+3} = \frac{x+2}{x}$ است. با ضرب دو طرف در ک.م.م مخرج‌ها یعنی $x(x+3)$ داریم:

$$3x+4+x(2x+1) = (x+2)(x+3) \Rightarrow 3x+4+2x^2+x = x^2+5x+6 \Rightarrow x^2-x-2=0 \xrightarrow{b=a+c} x_1=2, x_2=-1$$

در نتیجه اختلاف ریشه دیگر یعنی -1 و $k = 4$ برابر است با $4 - (-1) = 5$.

روش دوم: بدون محاسبه k دو طرف را در ک.م.م یعنی $x(x+3)$ ضرب می‌کنیم:

$$3x+k+x(2x+1) = (x+2)(x+3) \Rightarrow 3x+k+2x^2+x = x^2+5x+6$$

$$\Rightarrow x^2 - x + k - 6 = 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها} = S = \frac{-b}{a} = 1 \xrightarrow{x_1=2} x_2 = -1$$

$$\text{از طرفی } P = \frac{c}{a} = k - 6 \xrightarrow{x_1=2, x_2=-1} k - 6 = (-1)(2) \Rightarrow k - 6 = -2 \Rightarrow k = 4$$

از طرفی

پس اختلاف -1 و k برابر است با ۵. گزینه «۳»



فیلم‌های آموزشی



ششم

فصل

معادله و تابع درجه دوم

ریشه حقیقی معادله زندگی‌ام توایی؛ بیا و
مسئله را حل کن.

نمای کلی فصل

● **درس اول؛ معادله درجه دوم:** حل معادله درجه دوم / روابط بین ریشه‌ها / بررسی علامت و ریشه‌های معادله درجه دوم / تشکیل معادله درجه دوم / مقایسه یک عدد با ریشه‌های معادله درجه دوم / تغییر متغیر / بررسی ریشه‌های $ax^4 + bx^2 + c = 0$ / بررسی ریشه‌های $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ / ریشه مشترک معادله‌ها

● **درس دوم؛ تابع درجه دوم:** رأس و محور تقارن سهمی (نمودار تابع درجه دوم) / صفرهای تابع / سهمی و ناحیه‌های مختصات / علامت‌های a ، b و c از روی نمودار سهمی / وضعیت دو نمودار نسبت به هم

محتوا و جایگاه

✓ **شامل:** ریاضی دهم، فصل (۴) درس‌های ۱ و ۲ / ریاضی یازدهم، فصل (۱) درس ۱

✓ **پیش‌نیازهای فصل:** فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارتهای جبری

✓ **کاربردهای فصل:** همه فصل‌ها

✓ **بودجه‌بندی کنگور:** مستقیم: ۱ تا ۳ تست / غیرمستقیم: ۲ تا ۴ تست





این درس از نه مبحث «حل معادله درجه دوم»، «روابط بین ریشه‌ها»، «بررسی علامت و ریشه‌های معادله درجه دوم»، «تشکیل معادله درجه دوم»، «مقایسه یک عدد با ریشه‌های معادله درجه دوم»، «تغییر متغیر»، «بررسی ریشه‌های $ax^2 + bx + c = 0$ »، «بررسی ریشه‌های $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ » و «ریشه مشترک معادله‌ها» تشکیل شده است.



حل معادله درجه دوم

درس‌آموز

معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را که $a \neq 0$ باشد را، معادله درجه دوم می‌نامیم.

😊 آه! a صفر بشه معادله همیشه $bx + c = 0$ که درجه اوله نه درجه دوم.

برای تعیین جواب‌های معادله درجه دوم، روش‌های مختلفی وجود دارد که ابتدا حالت‌های خاص را بررسی می‌کنیم.

۱. اگر $b = 0$ باشد، آنگاه معادله به صورت $ax^2 + c = 0$ است که با شرط مختلف‌العلامت بودن a و c ، معادله دارای دو جواب قرینه به صورت $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ می‌باشد و اگر a و c هم‌علامت باشند معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال آموز: معادله $2x^2 + 3 = 0$ دارای ریشه حقیقی نیست ولی معادله $3x^2 - 12 = 0$ دارای دو جواب قرینه $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$

است، زیرا:

۲. اگر $c = 0$ باشد، آنگاه معادله به صورت $ax^2 + bx = 0$ است که همواره دارای دو جواب $x = 0$ و $x = -\frac{b}{a}$ است.

مثال آموز: معادله $2x^2 - 4x = 0$ دارای دو ریشه $x = 0$ و $x = 2$ است، زیرا:

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

۳. اگر جمع ضرایب صفر شود ($a + b + c = 0$)، آنگاه یکی از ریشه‌ها $x_1 = 1$ و دیگری $x_2 = \frac{c}{a}$ است.

تست آموز: یکی از ریشه‌های $2\sqrt{2}x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2} = 0$ چند برابر یکی از ریشه‌های $-\sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2} + 1 = 0$ می‌تواند باشد؟

$$\frac{2}{\sqrt{2}+1} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}+1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1} \quad (3) \quad \frac{2}{\sqrt{2}+1} \quad (4)$$

پاسخ: در معادله $2\sqrt{2}x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2} = 0$ مجموع ضرایب صفر است، پس $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$. در معادله دیگر نیز مجموع ضرایب

صفر است و $x'_1 = 1$ و $x'_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}}$ ، بنابراین:

$$\frac{x_2}{x'_2} = \frac{\frac{3+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \quad \text{گزینه «۳»}$$

۴. اگر ضریب x برابر مجموع دو تا ضریب دیگر باشد ($a + c = b$)، آنگاه یکی از ریشه‌ها $x_1 = -1$ و دیگری $x_2 = -\frac{c}{a}$ است.

تست آموز: اگر یکی از ریشه‌های معادله $(\sqrt{3}+1)x^2 + bx + (1-\sqrt{3}) = 0$ مساوی -1 باشد، آنگاه ریشه دیگر معادله کدام است؟

$$1-\sqrt{3} \quad (1) \quad \sqrt{3}-1 \quad (2) \quad 2-\sqrt{3} \quad (3) \quad 1-\sqrt{3} \quad (4)$$

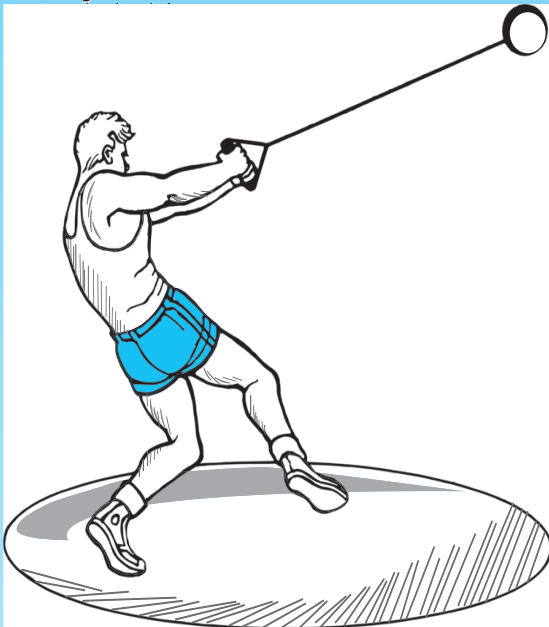
پاسخ: ریشه دیگر معادله $x_2 = -\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_2 = -\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \quad \text{گزینه «۲»}$$



هفتم

فصل



هندسه تحلیلی

اگر تحلیل کنی، می بینی که عشق نقطه
تلاقی مد نگاه من و توست.

نمای کلی فصل

- درس اول؛ معادله خط و وضعیت نسبی دو خط: دستگاه محورهای مختصات دکارتی / معادله خط / وضعیت نسبی دو خط
- درس دوم؛ وضعیت نسبی نقطه و خط: فاصله دو نقطه / دایره / مختصات وسط پاره خط / قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر / فاصله نقطه از خط / فاصله دو خط موازی

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی یازدهم، فصل (۱) درس ۱
- ✓ پیش نیازهای فصل: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۹)؛ هندسه دوازدهم / فصل (۱۴)؛ مشتق
- ✓ بودجه بندی کنگور: مستقیم: ۱ تا ۳ تست / غیرمستقیم: ۰ تا ۲ تست



لوح برتر انتخاب برترین ها

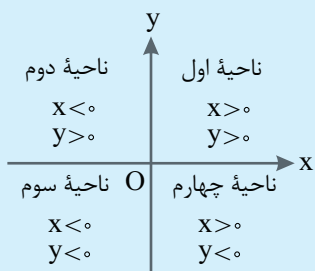


این درس از سه مبحث «دستگاه محورهای مختصات دکارتی»، «معادله خط» و «وضعیت نسبی دو خط» تشکیل شده است.



دستگاه محورهای مختصات دکارتی

درس آموز



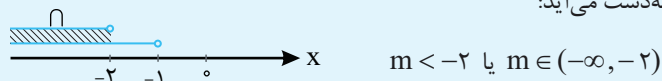
برای تعیین مختصات یک نقطه در صفحه، از دستگاه مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه شامل ۲ محور (افقی) و y (عمودی) و ۴ ناحیه است.

مثال آموز: اگر نقطه $A(m+1, -m-2)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟

پاسخ: در ناحیه دوم دستگاه مختصات، $x < 0$ و $y > 0$ می‌باشد، بنابراین:

$$A(m+1, -m-2) \Rightarrow \begin{cases} x = m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \\ y = -m-2 > 0 \Rightarrow -m > 2 \Rightarrow m < -2 \end{cases}$$

با اشتراک‌گیری از جواب‌های بالا، مطابق شکل زیر، حدود m به صورت زیر به دست می‌آید:



تست آموز: اگر نقطه $A(\frac{m+1}{m}, m-2)$ در ناحیه سوم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟

$$m < -1 \quad (4)$$

$$m > 2 \quad (3)$$

$$-1 < m < 0 \quad (2)$$

$$m < 2 \quad (1)$$

پاسخ: در ناحیه سوم، $x < 0$ و $y < 0$ است، بنابراین:

$$A(\frac{m+1}{m}, m-2) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m+1}{m} < 0 \\ y = m-2 < 0 \Rightarrow m < 2 \quad (1) \end{cases}$$

برای تعیین علامت x ، از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

$$x = \frac{m+1}{m} < 0 \xrightarrow{\text{ابتدا ریشه صورت و مخرج را به دست می‌آوریم}} \begin{cases} \text{ریشه صورت} \rightarrow m+1=0 \Rightarrow m=-1 \\ \text{ریشه مخرج} \rightarrow m=0 \end{cases}$$

m	-1	0	
$m+1$	$-$	$+$	$+$
m	$-$	$-$	$+$
$x = \frac{m+1}{m}$	$+$	$-$	$+$

$$x < 0 \Rightarrow -1 < m < 0 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow (m < 2) \cap (-1 < m < 0) = -1 < m < 0$$

که با اشتراک‌گرفتن از (۱) و (۲) داریم:

گزینه «۲»

اگر نقطه‌ای روی محور x باشد، عرض آن صفر است: $A(x, 0), (y = 0)$

و اگر نقطه‌ای روی محور y باشد، طول آن صفر است: $A(0, y), (x = 0)$



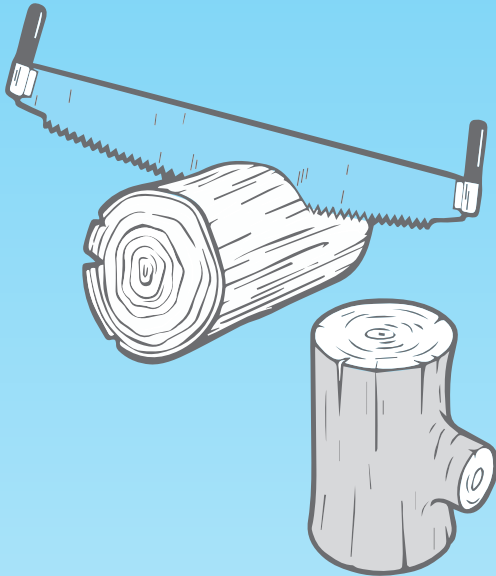
فیلم‌های آموزشی

هشتم

فصل

تابع قدر مطلق و جزء صحیح

قدرت رو می‌دونم؛ تو جزء صحیح مرا
رو می‌کنی.



نمای کلی فصل

- **درس اول؛ تابع قدر مطلق:** قدر مطلق / ویژگی‌های قدر مطلق / نامعادله‌های قدر مطلق / رسم نمودار توابع قدر مطلق / رسم نمودار مجموع یا تفاضل توابع خطی قدر مطلق دار
- **درس دوم؛ تابع جزء صحیح:** تابع پله‌ای / تابع جزء صحیح / ویژگی‌های جزء صحیح / نامعادلات براکتی / رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح / روش کلی رسم نمودار $y = [f(x)]$

محتوا و جایگاه

- ✓ **شامل:** ریاضی دهم، فصل (۵) درس ۳ / ریاضی یازدهم، فصل (۳) درس ۱
- ✓ **پیش‌نیازهای فصل:** فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۴)؛ تعیین علامت و نامعادله / فصل (۶)؛ معادله و تابع درجه دوم
- ✓ **کاربردهای فصل:** اغلب فصل‌ها
- ✓ **بودجه‌بندی کنکور:** غیرمستقیم: ۳ تا ۴ تست



لوح برتر انتخاب برترین‌ها



این درس از پنج مبحث «قدر مطلق»، «ویژگی‌های قدر مطلق»، «نامعادله‌های قدر مطلق»، «رسم نمودار توابع قدر مطلق» و «رسم نمودار مجموعه یا تفاضل توابع خطی قدر مطلق» تشکیل شده است.



قدر مطلق

درس آموز

اگر a عددی حقیقی باشد، قدر مطلق آن را با $|a|$ نشان می‌دهیم و می‌توان گفت که اگر a بزرگتر یا مساوی صفر باشد، قدر مطلق a برابر با خود a و اگر a کوچکتر از صفر باشد، قدر مطلق a برابر با $-a$ است. باتوجه به این تعریف داریم:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

فاصله نقاط a و b از یکدیگر روی محور اعداد همان $|a - b|$ است. بنابراین، فاصله عدد حقیقی a تا مبدأ برابر $|a|$ است.

مثال آموز: حاصل $|\sqrt{5} - 2|$ برابر $\sqrt{5} - 2$ است، زیرا $\sqrt{5} - 2 > 0$ ولی حاصل $|\pi - 3|$ برابر $3 - \pi$ است، زیرا $\pi - 3 < 0$ است. ($\pi \approx 3.14$)

اگر x دارای توان زوج باشد و بخواهیم از آن ریشه مرتبه زوج بگیریم، قدر مطلق ایجاد می‌شود، یعنی $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$ ($x \in \mathbb{N}$)، به‌ویژه $\sqrt{x^2}$ برابر با $|x|$ است.

تست آموز: اگر $A = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$ و B برابر با فاصله نقاط $\sqrt{3}$ و $2\sqrt{5}$ روی محور اعداد باشند، آنگاه اختلاف دو عدد A و B کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 2\sqrt{5} & (4) & \sqrt{5} & (3) & 2\sqrt{3} & (2) & \sqrt{3} & (1) \end{array}$$

پاسخ: ابتدا A و B را محاسبه می‌کنیم:

با استفاده از فرمول $\sqrt{a - b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ که در آن $c = \sqrt{a^2 - b}$ است، مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{\underbrace{8}_a - \underbrace{2\sqrt{15}}_{\sqrt{b}}} = \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} - \sqrt{\frac{8-2}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

البته می‌توان نوشت:

$$A = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3} \quad B = |2\sqrt{5} - \sqrt{3}| = |\sqrt{20} - \sqrt{3}| = \sqrt{20} - \sqrt{3} = 2\sqrt{5} - \sqrt{3}$$

اکنون اختلاف A و B ، یعنی $|A - B|$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|A - B| = |(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (2\sqrt{5} - \sqrt{3})| = |-\sqrt{5}| = \sqrt{5} \quad \text{گزینه «۳»}$$

اگر عبارت داخل قدر مطلق نامنفی باشد، خود عبارت و اگر منفی باشد، قرینه آن عبارت را از قدر مطلق بیرون می‌آوریم.

تست آموز: حاصل $\sqrt{4 + \cos^2 x - 4 \cos x} + |\cos x + 1| + |x^2 + x + 1|$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} x^2 + x + 2\cos x + 2 & (4) & x^2 + x + 1 & (3) & x^2 + x + 2\cos x - 2 & (2) & x^2 + x + 4 & (1) \end{array}$$

پاسخ: ابتدا منفی یا نامنفی بودن هر عبارت را مشخص می‌کنیم:

$$x^2 + x + 1 > 0; \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0, a = 1 > 0 \Rightarrow |x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$$

$$\cos x + 1 \geq 0; -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow |\cos x + 1| = \cos x + 1$$

$$\sqrt{4 + \cos^2 x - 4 \cos x} = \sqrt{(2 - \cos x)^2} = |2 - \cos x|$$

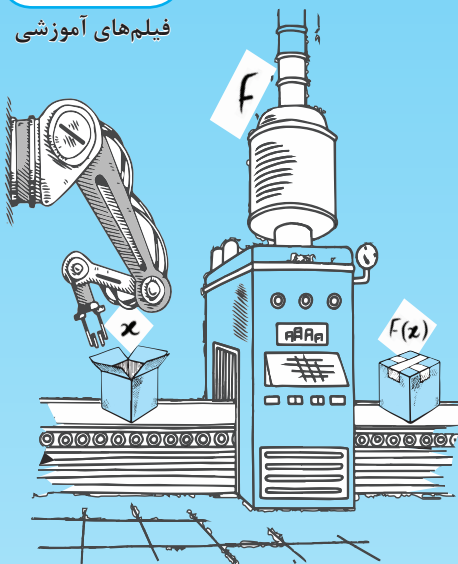
$$2 - \cos x > 0; -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \xrightarrow{2 - \cos x > 0} |2 - \cos x| = 2 - \cos x$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{4 + \cos^2 x - 4 \cos x} + |\cos x + 1| + |x^2 + x + 1| = 2 - \cos x + \cos x + 1 + x^2 + x + 1 = x^2 + x + 4 \quad \text{گزینه «۱»}$$



فیلم‌های آموزشی



نهم

فصل

تابع

حکم با دوست؛ بفرما تا گردن نهم.

نمای کلی فصل

- درس اول؛ مفهوم تابع و بازنمایی آن: مفهوم تابع و نمایش‌های مختلف آن / مقدار تابع در یک نقطه
- درس دوم؛ دامنه و برد توابع و تساوی دو تابع: دامنه تابع / برد تابع / تساوی دو تابع
- درس سوم؛ انتقال نمودارها: انتقال نمودارها
- درس چهارم؛ انواع توابع: انواع تابع / رسم تابع هموگرافیک
- درس پنجم؛ توابع چند جمله‌ای: تابع چند جمله‌ای / توابع یکنوا و اکیداً یکنوا
- درس ششم؛ اعمال جبری روی توابع: اعمال جبری روی توابع
- درس هفتم؛ ترکیب توابع: ترکیب توابع
- درس هشتم؛ تابع یک به یک و وارون تابع: تابع یک به یک / وارون یک تابع

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۵) / ریاضی یازدهم، فصل (۳) / ریاضی دوازدهم، فصل (۱)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۴)؛ تعیین علامت و نامعادله / فصل (۵)؛ معادله‌های گویا و رادیکالی / فصل (۶)؛ معادله و تابع درجه دوم / فصل (۸)؛ قدر مطلق و جزء صحیح
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۰)؛ توابع نمایی و لگاریتمی / فصل (۱۲)؛ مثلثات / فصل (۱۳)؛ حد و پیوستگی / فصل (۱۴)؛ مشتق / فصل (۱۵)؛ کاربرد مشتق
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۲ تا ۴ تست / غیرمستقیم: ۲ تا ۴ تست

۹



این درس از دو مبحث «مفهوم تابع و نمایش‌های مختلف آن» و «مقدار تابع در یک نقطه» تشکیل شده است.



مفهوم تابع و نمایش‌های مختلف آن

درس‌آموز

زوج مرتب: منظور از یک زوج مرتب، نمادی به صورت (x, y) است که در آن x را مؤلفه اول و y را مؤلفه دوم گوئیم.

مرتب یعنی ترتیب مؤلفه‌ها مهمه! مثلاً $(3, 6)$ با $(6, 3)$ برابر نیست!!

وقتی که مؤلفه‌ها عدد حقیقی باشند هر زوج مرتب نشانگر نقطه‌ای روی دستگاه مختصات است. مؤلفه اول معرف طول و مؤلفه دوم معرف عرض نقطه است. برای اینکه دو زوج مرتب با هم برابر باشند، باید مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند، به عبارت دیگر:

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow x = z, y = t$$

رابطه: دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید، یک رابطه از A به B ، مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به صورت (x, y) است که در آن x از مجموعه A و y از مجموعه B انتخاب می‌شود و معمولاً آن را با R نشان می‌دهیم.

مثال آموز: فرض کنید $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 5, 8\}$ باشند، در این صورت $R_1 = \{(2, 1)\}$ ، $R_2 = \{(4, 5), (6, 8)\}$ و $R_3 = \{(2, 1), (6, 1)\}$ رابطه‌هایی از A به B و $R_4 = \{(1, 2), (5, 6)\}$ و $R_5 = \{(1, 2), (5, 6), (8, 6)\}$ رابطه‌هایی از B به A هستند.

تابع: یک تابع بین دو مجموعه A و B رابطه‌ای است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

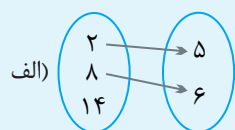
تست آموز: کدام یک از رابطه‌های زیر معرف یک تابع نیست؟

- (۱) رابطه‌ای که در یک لحظه به هر شخص، قد او را نسبت می‌دهد.
 - (۲) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه پنجم آن را نسبت می‌دهد.
 - (۳) رابطه‌ای که به هر عدد، مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت می‌دهد.
 - (۴) رابطه‌ای که به هر عدد دلخواه، مربع آن را نسبت می‌دهد.
- پاسخ:** همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
- گزینه (۱): تابع است زیرا هر شخص یک قد مشخص دارد.
- گزینه (۲): تابع است زیرا هر عدد فقط یک ریشه پنجم دارد.
- گزینه (۳): تابع نیست زیرا برای مثال عدد ۹ سه مقسوم‌علیه ۱، ۳ و ۹ دارد.
- گزینه (۴): تابع است زیرا هر عدد فقط یک مربع دارد.
- گزینه (۳): تابع نیست زیرا برای مثال عدد ۹ سه مقسوم‌علیه ۱، ۳ و ۹ دارد.

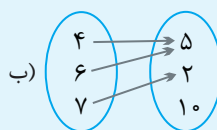
نمایش‌های مختلف تابع:

۱. نمودار پیکانی تابع (نمودار ون): یک رابطه به صورت پیکان جهت‌دار، زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه اول یک پیکان خارج شده باشد و هر پیکان به یک عضو از مجموعه دوم نظیر شده باشد.

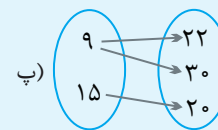
مثال آموز: رابطه‌های «الف» و «ب» تابع نیستند ولی «ج» تابع است.



از ۱۴ پیکانی خارج نشده است.



تابع است.



از ۹ دو پیکان خارج شده است.

در نمودار قسمت «ب» از هر عضو مجموعه اول (یعنی ۴، ۶ و ۷) یک پیکان خارج شده است و هر پیکان فقط به یک عضو از مجموعه دوم نظیر شده‌اند، یعنی ۴ فقط به ۵، ۶ فقط به ۵ و ۷ فقط به ۲ وصل شده‌اند.

به وقت نگی تو قسمت «ب» چرا ۱۰ تنهاس! فب تعریف نگفته هتمن به مجموعه ۴ پیکان وارد بشه! پس اون عدد ۱۰ مانعی برای تابع شدن نیست!!

در نمودار پیکانی تابع به مجموعه اول دامنه و به مجموعه دوم هم‌دامنه می‌گویند. حال مجموعه همه عضوهای از مجموعه دوم که پیکان به آن‌ها وارد می‌شود برد می‌گویند. اگر این تابع را f بنامیم، آنگاه دامنه آن را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهند.

دامنه: Domain

برد: Range



فیلم‌های آموزشی

دهم

فصل

توابع نمایی و لگاریتمی



اگر هاریتم زندگی را در مبنای قلبم محاسبه کنم، توان عشق تو معلوم می‌شود.

نمای کلی فصل

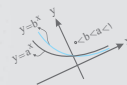
- درس اول؛ تابع نمایی: تعریف تابع نمایی / معادلات نمایی / نامساوی‌های نمایی
- درس دوم؛ تابع لگاریتمی: تعریف تابع لگاریتمی / دامنه توابع لگاریتمی / ویژگی‌های لگاریتم
- درس سوم؛ معادلات و نامعادلات نمایی و لگاریتمی: حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم / معادلات لگاریتمی / ضابطه وارون توابع نمایی و لگاریتمی / نامعادلات لگاریتمی / جزء صحیح لگاریتم
- درس چهارم؛ نمودار و کاربردها: نمودار توابع نمایی و لگاریتمی / کاربرد تابع نمایی / کاربرد تابع لگاریتمی

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی یازدهم، فصل (۵)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۹)؛ تابع
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۳)؛ حد و پیوستگی / فصل (۱۴)؛ مشتق
- ✓ بودجه‌بندی کنگور: مستقیم: ۱ تا ۲ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۲ تست



$$f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow f(x) = g(x)$$



درس ۱

این درس از سه مبحث «تعریف تابع نمایی»، «معادلات نمایی» و «نامساوی‌های نمایی» تشکیل شده است.



تعریف تابع نمایی

درس آموز

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ است را یک تابع نمایی می‌گوییم. (محدوده a : $0 < a < 1$ یا $a > 1$)

دقت کنید که باتوجه به تعریف تابع نمایی، a عددی منفی، صفر یا یک نمی‌تواند باشد.

قوانین توان‌های حقیقی: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\begin{aligned} 1) a^0 &= 1 & 2) a^{-x} &= \frac{1}{a^x} & 3) a^x a^y &= a^{x+y} & 4) (a^x)^y &= a^{xy} \\ 5) (ab)^x &= a^x b^x & 6) \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} & 7) \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \end{aligned}$$

مثال آموز: هریک از توابع زیر یک تابع نمایی است:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= 5^x & 2) f(x) &= 2^{-x} \xrightarrow{\text{زیرا}} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ 3) f(x) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \xrightarrow{\text{زیرا}} f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x & 4) f(x) &= (\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{زیرا}} f(x) = (\sqrt[4]{3})^x \\ 5) f(x) &= (-2)^{2x} \xrightarrow{\text{زیرا}} f(x) = ((-2)^2)^x = 2^x \end{aligned}$$

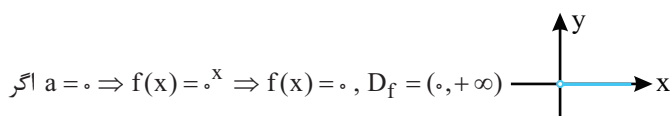
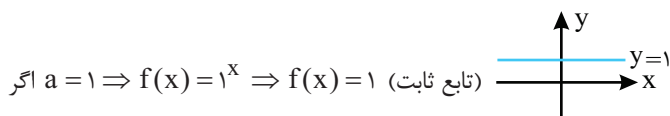
هیچ‌کدام از توابع زیر، نمایی نیستند:

$$\begin{aligned} 6) f(x) &= (-2)^x \rightarrow (a < 0 \text{ زیرا}) & 7) f(x) &= (-\sqrt{5})^x \rightarrow (a < 0 \text{ زیرا}) & 8) f(x) &= (1)^x \rightarrow (a = 1 \text{ زیرا}) \end{aligned}$$

پس یادتون نره بپه‌ها که پایه نباید به عدد منفی، صفر یا یک بشه. همین!!!

در تابع $y = a^x$ ، اگر $a = 1$ یا $a = 0$ شود،

آنگاه تبدیل به یک تابع ثابت می‌شود یعنی داریم:



صفر به توان صفر، که با 0^0 نمایش داده می‌شود یک عبارت ریاضی است که توافقی برای مقدار آن وجود ندارد. در بیشتر موارد آن را برابر یک یا بدون تعریف می‌دانند.

تست آموز: به‌ازای $m \in (a, b) - \{c, d\}$ تابع $f(x) = (9 - m^2)^x$ یک تابع نمایی است. مقدار $b - a + c + d$ کدام است؟

$$\text{صفر (۱)} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6$$

پاسخ: در صورتی $f(x)$ یک تابع نمایی است که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} 9 - m^2 > 0 \Rightarrow -m^2 > -9 \xrightarrow{\times(-1)} m^2 < 9 \xrightarrow{\sqrt{}} |m| < 3 \Rightarrow -3 < m < 3 \\ 9 - m^2 \neq 1 \Rightarrow -m^2 \neq -8 \xrightarrow{\times(-1)} m^2 \neq 8 \Rightarrow m \neq \pm\sqrt{8} \Rightarrow m \neq \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

پس $a = -3$, $b = 3$, $c = -2\sqrt{2}$ و $d = 2\sqrt{2}$ است. بنابراین:

$$b - a + c + d = 3 - (-3) + 2\sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) = 6 \quad \text{گزینه «۴»}$$



فیلم‌های آموزشی

فصل یازدهم

هندسه پایه

هندسه چشم دوست حلقه رام بلاست
هر که در این حلقه نیست، فارغ از این ماجراست



نمای کلی فصل

- درس اول؛ ترسیم‌های هندسی: دایره / عمودمنصف یک پاره‌خط / نیمساز یک زاویه
- درس دوم؛ استدلال و قضیه تالس: استدلال و تناسب / قضیه تالس
- درس سوم؛ تشابه دو مثلث: تشابه دو مثلث
- درس چهارم؛ نتایج تشابه مثلث‌ها: نسبت اجزای تشابه در دو مثلث / روابط طولی مهم در مثلث قائم‌الزاویه

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی یازدهم، فصل (۲)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۶)؛ معادله و تابع درجه دوم
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۹)؛ هندسه دوازدهم
- ✓ بودجه‌بندی کنگور: مستقیم: ۲ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۱ تست



این درس از سه مبحث «دایره»، «عمودمنصف یک پاره‌خط» و «تیمساز یک زاویه» تشکیل شده است.



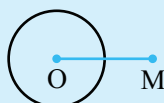
دایره

درس‌آموز

مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند «O» (به نام مرکز)، فاصله‌ای برابر به اندازه R دارند یک دایره را تشکیل می‌دهند و می‌نویسیم $C(O, R)$ یعنی دایره به مرکز O و شعاع R.

رسم دایره: برای رسم دایره از پرگار استفاده می‌کنیم و دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره باز می‌کنیم.

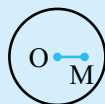
وضعیت نقطه $M(x_1, y_1)$ نسبت به دایره $C(O, R)$:



نقطه M بیرون دایره است $\Leftrightarrow OM > R$



نقطه M روی دایره است $\Leftrightarrow OM = R$



نقطه M درون دایره است $\Leftrightarrow OM < R$

تست‌آموز: شعاع دایره‌ای به مرکز $O(3, -2)$ که از نقطه $M(-1, 1)$ می‌گذرد کدام است؟

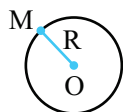
۱ (۴)

۷ (۳)

$\sqrt{6}$ (۲)

۵ (۱)

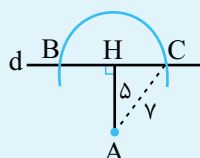
پاسخ: مطابق شکل روبه‌رو، دایره از نقطه M می‌گذرد، پس فاصله O تا M یعنی OM برابر شعاع دایره است.



$$OM = R = \sqrt{(3 - (-1))^2 + ((-2) - 1)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{گزینه «۱»}$$

از رسم دایره برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه، مقدار مشخصی باشد استفاده می‌کنیم.

مثال‌آموز: خط d و نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر از آن مفروض‌اند. نقاطی از خط d را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر ۷ باشد.



پاسخ: دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. این دایره خط را در دو نقطه B و C قطع می‌کند. نقاط B و C جواب سؤال هستند.

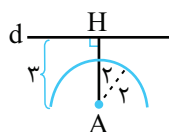
تست‌آموز: خط d و نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن مفروض‌اند. چند نقطه روی خط d وجود دارد به‌طوری که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر ۲ باشد؟

۴ بی‌شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)



پاسخ: مطابق شکل روبه‌رو، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. از آنجایی که

$$R = 2 < AH = 3 \quad \text{می‌باشد و دایره، خط را قطع نمی‌کند، مسأله جواب ندارد. گزینه «۱»}$$



مجموعه نقاطی از صفحه که از یک خط مانند d فاصله ثابتی برابر h دارند، دو خط موازی با d مانند d' و d'' می‌باشند که در دو طرف خط d قرار دارند.

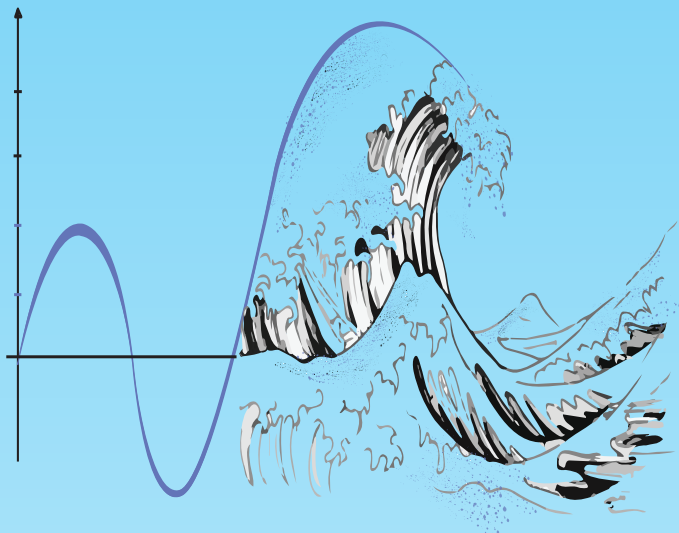


فیلم‌های آموزشی

فصل دوازدهم

مثلثات

کمان نگاهت با مرکز قلبم چه زاویه‌ای
ساخت که دانه در نوسانم؟



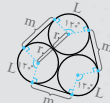
نمای کلی فصل

- درس اول؛ واحدهای اندازه‌گیری زاویه؛ دایره مثلثاتی / حدود تغییرات نسبت‌های مثلثاتی و مساحت
- درس دوم؛ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی؛ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
- درس سوم؛ معادلات مثلثاتی؛ معرفی مهم‌ترین نقاط دایره مثلثاتی / معادلات کلی مثلثاتی
- درس چهارم؛ تناوب و نمودار توابع مثلثاتی؛ تناوب و تابع متناوب / توابع مثلثاتی

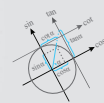
محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۲) / ریاضی یازدهم، فصل (۴) / ریاضی دوازدهم، فصل (۲)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۴)؛ تعیین علامت و نامعادله / فصل (۶)؛ معادله و تابع درجه دوم / فصل (۹)؛ تابع
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۳)؛ حد و پیوستگی / فصل (۱۴)؛ مشتق
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۴ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۲ تست

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



واحدهای اندازه گیری زاویه



درس ۱

$$L = r \cdot \theta \text{ rad}$$

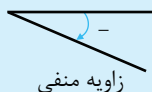
این درس از دو مبحث «دایره مثلثاتی» و «حدود تغییرات نسبت های مثلثاتی و مساحت» تشکیل شده است.



دایره مثلثاتی

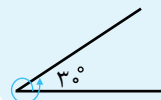
درس آموز

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. در ابتدا زاویه را تعریف می کنیم و نکات مربوط به آن را آموزش می دهیم.
تعریف زاویه: یک زاویه از دو پاره خط (یا نیم خط) که رأس مشترک دارند، به وجود می آید.
 اگر این دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت (پادساعتگرد) باشد، زاویه را مثبت در نظر می گیریم.
 اگر این دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت (ساعتگرد) باشد، زاویه را منفی در نظر می گیریم.



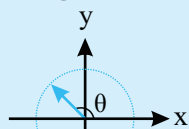
تفاوت زاویه مثلثاتی و زاویه هندسی: مقدار زاویه مثلثاتی هر مقدار حقیقی می تواند باشد ولی مقدار زاویه هندسی بین دو نیم خط عددی از صفر تا ۱۸۰ درجه در نظر گرفته می شود.

مثال آموز: در شکل زیر، زاویه هندسی برابر ۳۰ درجه می باشد ولی زاویه مثلثاتی باتوجه به دوران و جهت آن برابر با ۳۹۰ درجه می باشد.



$$\text{زاویه مثلثاتی} = 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$$

زاویه استاندارد: اگر رأس یک زاویه بر مبدأ مختصات و ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور X ها باشد، زاویه در موقعیت استاندارد قرار می گیرد. مانند زاویه رسم شده در شکل روبه رو که در موقعیت استاندارد می باشد.



انواع زاویه ها:

زاویه ها را باتوجه به مقدارشان به صورت زیر طبقه بندی می کنند:

۱. زاویه تند (حاده): زاویه θ را تند یا حاده گوئیم هرگاه اندازه اش کمتر از ۹۰ درجه باشد. ($\theta < 90^\circ$)

۲. زاویه راست (قائمه): زاویه θ را راست یا قائمه گوئیم هرگاه اندازه آن برابر ۹۰ درجه باشد. ($\theta = 90^\circ$)

۳. زاویه باز (منفرجه): زاویه θ را باز یا منفرجه گوئیم هرگاه بزرگتر از ۹۰ درجه و کمتر از ۱۸۰ درجه باشد. ($90^\circ < \theta < 180^\circ$)

۴. زاویه نیم صفحه: زاویه θ را نیم صفحه گوئیم هرگاه برابر ۱۸۰ درجه باشد. ($\theta = 180^\circ$)

۵. زاویه بازتاب: زاویه θ را زاویه بازتاب گوئیم هرگاه بزرگتر از ۱۸۰ درجه و کمتر از ۳۶۰ درجه باشد. ($180^\circ < \theta < 360^\circ$)

۶. زاویه کامل: زاویه θ را کامل یا تمام صفحه گوئیم هرگاه برابر ۳۶۰ درجه باشد. ($\theta = 360^\circ$)

واحدهای اندازه گیری زاویه:

تعریف درجه: اگر محیط یک دایره دلخواه را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی روبه روی هر کمان را یک درجه می نامیم؛ به عبارتی دیگر زاویه روبه رو به کمانی از دایره که طول کمان $\frac{1}{360}$ محیط دایره باشد، یک درجه نام دارد و به صورت 1° نشان می دهیم.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$



1 2 3 4
5 6 7 8
9 0



$$x > [x]$$



$$|x|$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$f(x)$$





فیلم‌های آموزشی

حد و پیوستگی

تورا که می بینم قلبم پیوسته می تپد؛ حد
نهایی عشق همین است.



نمای کلی فصل

- درس اول؛ بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها؛ تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای
- درس دوم؛ مفاهیم اولیه حد؛ همسایگی / مفهوم میل کردن / تعریف حد / حدهای دوشاخه‌ای (حدهای چپ و راست) / قضایای حد / حد توابع شامل جزء صحیح (حد توابع براکتی) / حد توابع خطی زیر رادیکال
- درس سوم؛ حد صفر صفر؛ مفهوم مبهم صفر صفر / رفع ابهام صفر صفر / رفع ابهام صفر صفر / در توابع گنگ (رادیکالی) / رفع ابهام صفر صفر در توابع مثلثاتی
- درس چهارم؛ پیوستگی؛ پیوستگی در نمودار / پیوستگی در نقطه / پیوستگی در بازه
- درس پنجم؛ حد بی‌نهایت (حد نامتناهی)؛ مفهوم حد بی‌نهایت (حد نامتناهی) / انواع نمودارهای مربوط به حد بی‌نهایت
- درس ششم؛ حد در بی‌نهایت؛ مفهوم حد در بی‌نهایت / حد نامتناهی در بی‌نهایت / رفع ابهام ∞ در بی‌نهایت / رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی یازدهم، فصل (۶) / ریاضی دوازدهم، فصل (۲)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۸)؛ قدر مطلق و جزء صحیح / فصل (۹)؛ تابع / فصل (۱۲)؛ مثلثات / فصل (۱۰)؛ توابع نمایی و لگاریتمی
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۴)؛ مشتق / فصل (۱۵)؛ کاربرد مشتق
- ✓ بودجه‌بندی کنگور: مستقیم: ۳ تا ۴ تست / غیرمستقیم: ۰ تا ۱ تست

این درس از یک مبحث «تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای» تشکیل شده است.



تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

درس آموز

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ اگر خارج قسمت را $Q(x)$ و باقیمانده را عددی حقیقی مانند R در نظر بگیریم همواره داریم:

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \hline x-a \\ Q(x) \end{array} \xrightarrow{\text{رابطه تقسیم}} f(x) = (x-a)Q(x) + R$$

رابطه فوق به ازای تمامی مقادیر x درست است از جمله به ازای $x=a$ ، لذا با قراردادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق داریم:

$$f(\cancel{x}) = (\underbrace{\cancel{x} - a}_0)Q(x) + R \Rightarrow f(a) = R$$

پس نتیجه خواهیم گرفت:

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $x-a$ ، باقیمانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد، آنگاه $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

تست آموز: باقیمانده تقسیم عبارت $5x^2 - 2x + 1$ بر $x+2$ کدام است؟

۹ (۱) -۱ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴)

پاسخ: برای به دست آوردن باقیمانده $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ بر $x+2$ کافی است $f(-2)$ را به دست آوریم، پس داریم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \xrightarrow{\text{باقیمانده}} R = f(-2) = 5(-2)^2 - 2(-2) + 1 = -16 + 4 + 1 = -11 \quad \text{گزینه «۱»}$$

تست آموز: باقیمانده تقسیم عبارت $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x+1$ برابر ۴ است. a کدام است؟

-۴ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: چون باقیمانده $f(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x+1$ برابر ۴ است پس $f(-1) = 4$ می باشد یعنی داریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \xrightarrow[\text{باقیمانده}]{R=4} R = f(-1) = (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4$$

$$\Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \quad \text{گزینه «۲»}$$

تست آموز: اگر دو چندجمله‌ای $x^3 - 4x^2 + 5x + a$ و $x^2 + 3x - 2$ در تقسیم بر $x+2$ هم باقیمانده باشند، a کدام است؟

۳۴ (۴) ۳۲ (۳) ۳۰ (۲) ۲۸ (۱)

پاسخ: چون هر دو چندجمله‌ای $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + a$ و $f_2(x) = x^2 + 3x - 2$ هم باقیمانده می باشند پس خواهیم داشت:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow R = f_1(-2) = f_2(-2) \Rightarrow (-2)^3 + 3(-2) - 2 = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 5(-2) + a$$

$$\Rightarrow -8 - 6 - 2 = -8 - 16 - 10 + a \Rightarrow -4 = -34 + a \Rightarrow a = 30 \quad \text{گزینه «۲»}$$

برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ کافی است $ax+b$ را برابر صفر قرار دهیم و ریشه آن یعنی $\frac{-b}{a}$ را به دست

آوریم، سپس با قراردادن $\frac{-b}{a}$ در چندجمله‌ای $f(x)$ باقیمانده به دست می آید، پس داریم:

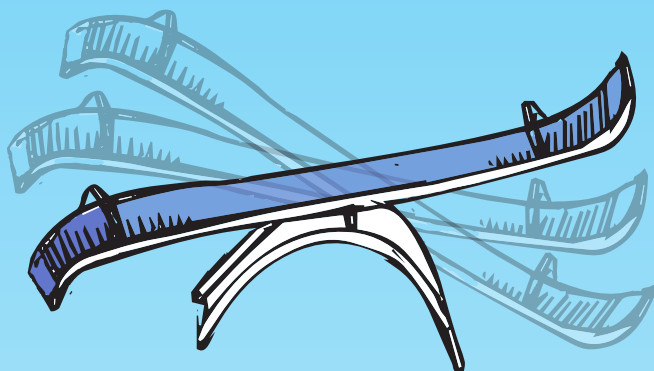
$$ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a} \Rightarrow R=f\left(\frac{-b}{a}\right)$$



فیلم‌های آموزشی

فصل چهاردهم

مشتق



مماسی بر قلبم بخش و عشق را
اندازه کن.

نمای کلی فصل

- **درس اول؛ آشنایی با مفهوم مشتق:** تعریف شیب / مفهوم خط مماس بر منحنی / تعریف مشتق / تعریف مشتق چپ و راست
- **درس دوم؛ تابع‌های مشتق و فرمول‌های مشتق:** تابع مشتق / فرمول‌های مشتق / مشتق عامل صفرکننده / مشتق توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح / مشتق تابع مرکب / معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی / ریشه ساده و مکرر / مماس بودن دو منحنی بر یکدیگر / مشتق مرتبه دوم
- **درس سوم؛ مشتق پذیری و مشتق ناپذیری:** مشتق پذیری در یک نقطه / محاسبه مشتق توابع چندضابطه‌ای / مشتق پذیری روی یک بازه / مشتق ناپذیری / دامنه تابع مشتق
- **درس چهارم؛ آهنگ تغییر:** آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر / محاسبه تقریبی مشتق به کمک مقادیر تابع

محتوا و جایگاه

- ✓ **شامل:** ریاضی دوازدهم، فصل (۴)
- ✓ **پیش‌نیازهای فصل:** فصل (۷)؛ هندسه تحلیلی / فصل (۸)؛ قدر مطلق و جزء صحیح / فصل (۹)؛ تابع / فصل (۱۳)؛ حد و پیوستگی / فصل (۱۰)؛ توابع نمایی و لگاریتمی
- ✓ **کاربردهای فصل:** فصل (۱۵)؛ کاربرد مشتق
- ✓ **بودجه‌بندی کنگور:** مستقیم: ۲ تا ۴ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۲ تست

۱۴

این درس شامل چهار مبحث «تعریف شیب»، «مفهوم خط مماس بر منحنی»، «تعریف مشتق» و «تعریف مشتق چپ و راست» می‌باشد.



تعریف شیب

درس‌آموز

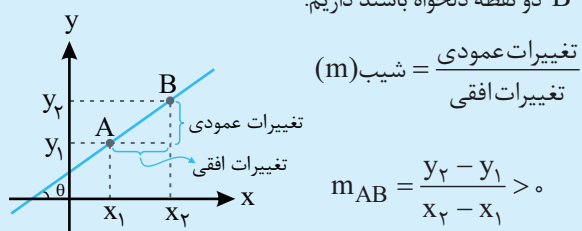
حد و مشتق ارتباط بسیار نزدیکی با هم دارند. تحلیل دقیق سرعت و شتاب در علم فیزیک بدون بهره‌گیری از مشتق تقریباً غیرممکن است.

به کمک مشتق جهت تغییرات نمودارها و ماکزیمم و مینیمم آن‌ها به‌طور دقیق بررسی و تعیین می‌شود.

مشتق به شکل امروزی مدیون تلاش‌های دانشمندان بزرگی همچون نیوتن و لایپ‌نیتس می‌باشد.

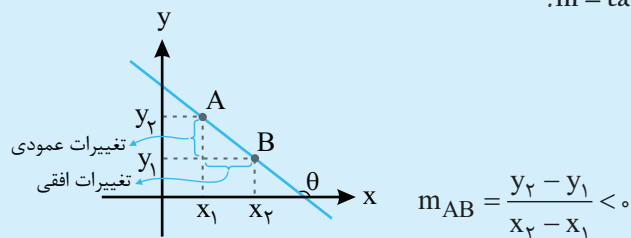
تعریف شیب:

مفهوم شیب یعنی نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی، از لحاظ ریاضی اگر A و B دو نقطه دلخواه باشند داریم:



در این حالت شیب خط مثبت است و زاویه θ (زاویه بین نمودار و جهت مثبت محور x ‌ها) حاده است و در حرکت از چپ به راست به سمت بالا می‌رویم، یعنی صعودی است.

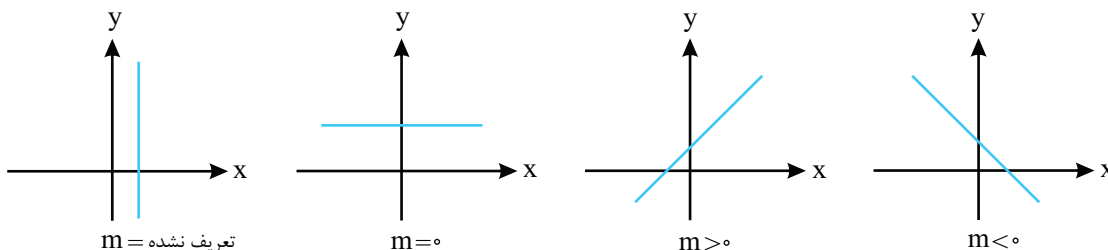
😊 بچه‌ها هتماً یاد تون هست که شیب خط، همون تانژانت θ می‌شه؛ یعنی $m = \tan \theta$.



در این حالت شیب خط منفی است و زاویه θ منفرجه (باز) است و در حرکت از چپ به راست به سمت پایین می‌رویم، یعنی نمودار نزولی است.

📖 اگر خطی موازی محور x ‌ها باشد، شیب آن صفر می‌باشد و اگر خطی موازی محور y ‌ها باشد شیب آن تعریف نشده می‌باشد. به‌طور کلی شیب خط به یکی

از حالت‌های زیر می‌باشد:



📖 مفهوم شیب در حالتی که عددی کسری به‌صورت $\frac{a}{b}$ نوشته شده باشد، بدین معناست که به‌ازای هر b واحد حرکت در امتداد محور x ‌ها، a واحد

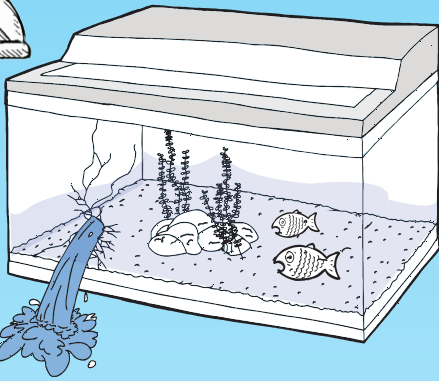
در امتداد محور y ‌ها، حرکت می‌کنیم. به‌عنوان مثال شیب $\frac{2}{3}$ بدین معناست که به‌ازای هر ۳ واحدی که خط در امتداد محور x ‌ها می‌پیماید، ۲ واحد در

امتداد محور y ‌ها بالا می‌رود. همچنین شیب $-\frac{1}{5}$ نشان می‌دهد همچنان که خط ۵ واحد به‌صورت افقی و موازی با محور x ‌ها می‌پیماید، یک واحد در امتداد

محور y ‌ها پایین می‌رود.



فیلم‌های آموزشی



کاربرد مشتق

ختمام از یثینلی غم و کمینلی خاری؛
یا این وضعیت را بهینه کن.

نمای کلی فصل

- **درس اول؛ اکسترم‌های تابع:** آزمون یکنوایی تابع / یکنوایی توابع کسری گویا / تشخیص اکسترم‌های نسبی از روی نمودار تابع / نقاط بحرانی تابع / روش به‌دست‌آوردن نقاط بحرانی / آزمون مشتق اول در تعیین اکسترم‌های نسبی / تعیین نوع اکسترم‌های نسبی از روی نمودار f' / تشخیص اکسترم‌های نسبی به روش آزمون مقایسه / اکسترم مطلق
- **درس دوم؛ بهینه‌سازی:** تعریف بهینه‌سازی / نکاتی از بهینه‌سازی

محتوا و جایگاه

- ✓ **شامل:** ریاضی دوازدهم، فصل (۵)
- ✓ **پیش‌نیازهای فصل:** فصل (۳)؛ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری / فصل (۹)؛ تابع / فصل (۱۳)؛ حد و پیوستگی / فصل (۱۴)؛ مشتق
- ✓ **بودجه‌بندی کنگور:** مستقیم: ۲ تا ۴ تست / غیرمستقیم: ۰ تا ۱ تست

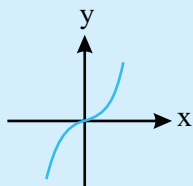


این درس از نه مبحث «آزمون یکنوایی تابع»، «یکنوایی توابع کسری گویا»، «تشخیص اکسترم‌های نسبی از روی نمودار تابع»، «نقاط بحرانی تابع»، «روش به‌دست‌آوردن نقاط بحرانی»، «آزمون مشتق اول در تعیین اکسترم‌های نسبی»، «تعیین نوع اکسترم‌های نسبی از روی نمودار f' »، «تشخیص اکسترم‌های نسبی به‌روش آزمون مقایسه» و «اکسترم مطلق» تشکیل شده است.



آزمون یکنوایی تابع

درس‌آموز

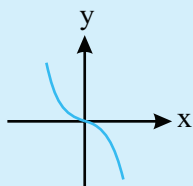


در فصل تابع، با مفاهیم صعودی و نزولی و همچنین اکیداً صعودی و اکیداً نزولی آشنا شدید. در توابع اکیداً صعودی با افزایش x ، مقادیر y هم افزایش می‌یابد. با رسم خطوط مماس در نقاط مختلف این توابع، مشاهده می‌کنیم که شیب همه آن‌ها مثبت است. از طرفی شیب خط مماس، همان مشتق در نقطه تماس است. بنابراین مشتق توابع اکیداً صعودی همواره مثبت می‌باشد؛ یعنی داریم:

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ اکیداً صعودی}$$

همچنین در توابع اکیداً نزولی با افزایش x ، مقادیر y کاهش می‌یابد.

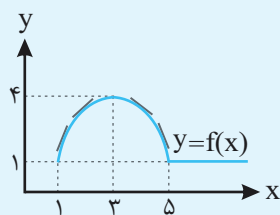
با رسم خطوط مماس در نقاط مختلف این توابع، مشاهده می‌کنیم که شیب همه آن‌ها منفی است. بنابراین مشتق توابع اکیداً نزولی همواره منفی است؛ یعنی داریم:



$$f' < 0 \Rightarrow f \text{ اکیداً نزولی}$$

آزمون یکنوایی توابع: در بازه‌ای از دامنه f که f' موجود باشد داریم:

۱. اگر در یک بازه f' مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
۲. اگر در یک بازه f' منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.
۳. اگر در یک بازه f' برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



مثال آموز: تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

ملاحظه می‌شود که:

- الف) در بازه $(1, 3)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f مثبت است، بنابراین در این بازه علامت f' مثبت است.
- ب) در بازه $(3, 5)$ که f اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f منفی است، بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.
- پ) در بازه $(5, +\infty)$ که تابع مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر صفر است.

خلاصه نتایج یکنوایی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left. \begin{array}{l} ۱) f' > 0 \Rightarrow f \text{ اکیداً صعودی} \\ ۲) f' < 0 \Rightarrow f \text{ اکیداً نزولی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{اکیداً یکنوا}$$

بچه‌ها فعلاً این پوری از ما بپذیرین! رفتیم جلو ریزه‌ریز این‌ها رو بررسی می‌کنیم!! مثلاً ممکنه به جاهایی f' صفر بشه ولی تابع اکیداً صعودی (یا نزولی) بشه!!

$$\left. \begin{array}{l} ۳) f' \geq 0 \Rightarrow f \text{ صعودی} \\ ۴) f' \leq 0 \Rightarrow f \text{ نزولی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{یکنوا}$$



فیلم‌های آموزشی

فصل شانزدهم



شمارش بدون شمردن

خودت را در آینه دیده‌ای؟ فکر می‌کنی این ترکیب چند بار اتفاق می‌افتد؟

نمای کلی فصل

- درس اول؛ شمارش و جایگشت: اصل جمع / اصل ضرب / اصل متمم / فاکتوریل / جایگشت
- درس دوم؛ ترتیب و ترکیب: ترتیب / ترکیب

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۶)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
- ✓ کاربردهای فصل: فصل (۱۷)؛ احتمال
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۰ تا ۱ تست / غیرمستقیم: ۱ تا ۲ تست

این درس از پنج مبحث «اصل جمع»، «اصل ضرب»، «اصل متمم»، «فاکتوریل» و «جایگشت» تشکیل شده است.



اصل جمع

درس آموز

اگر بتوان کاری را به k روش انجام داد به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام، m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر، $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ انتخاب وجود دارد.



مثال آموز: فرض کنید نزدیک خانه شخصی، یک رستوران سنتی با ۳ نوع غذا و یک ساندویچی با ۴ نوع ساندویچ وجود دارد. اگر این شخص بخواهد بیرون منزل و در یکی از این ۲ مکان غذا بخورد (رستوران یا ساندویچی) $3 + 4 = 7$ انتخاب برای غذا خوردن دارد.



اصل ضرب

درس آموز

اگر انجام کاری k مرحله باشد، به طوری که در مرحله اول m_1 انتخاب، در مرحله دوم m_2 انتخاب و در مرحله k ام، m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام آن کار، $m_1 \times \dots \times m_k$ انتخاب وجود دارد.



مثال آموز: فرض کنید شخصی ۳ شلوار و ۴ پیراهن دارد. این شخص $4 \times 3 = 12$ حالت می تواند لباس بپوشد.



هواستون باشه انتقابامون شلوار با پیراهنه، فقط همین! ما کاری به کفش و بقیه نداریم! آگه اوناه هم وارد بازی می شرن، تعداد اوناه رو هم ضرب می کردیم.



برای کارهای یک مرحله ای از اصل جمع و برای انجام کاری که دارای چندین مرحله باشد، از اصل ضرب استفاده می کنیم. اصل جمع متناظر با «یا» و اصل ضرب متناظر با «و» می باشد.



مثال آموز: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱:

(الف) چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟

(ب) چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت؟

(ج) چند عدد ۳ رقمی فرد با ارقام متمایز می توان نوشت؟

پاسخ: در حل مسائل تعداد اعداد، تکرار ارقام مجاز است مگر آنکه متمایز بودن ارقام ذکر شود.

(الف) از آنجایی که تکرار ارقام مجاز است، برای یکان، دهگان و صدگان هر کدام ۵ حالت وجود دارد و بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد برابر است با:

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ب) چنانچه ارقام متمایز باشند در نتیجه صدگان ۵ حالت، دهگان ۴ حالت و یکان ۳ حالت دارد مثل:

در مسائل مربوط به اصل ضرب، ابتدا حالت هایی را بررسی می کنیم که محدودیت بیشتری دارند.



(ج) ۱. رقم تکراری وجود ندارد. ۲. عددی فرد است که یکان آن فرد باشد.

ابتدا باید حالتی را بررسی کنیم که محدودیت بیشتری دارد، بنابراین برای رقم یکان ۳ حالت $\{1, 3, 5\}$ و برای صدگان ۴ حالت و دهگان ۳ حالت وجود

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

دارد و بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با:



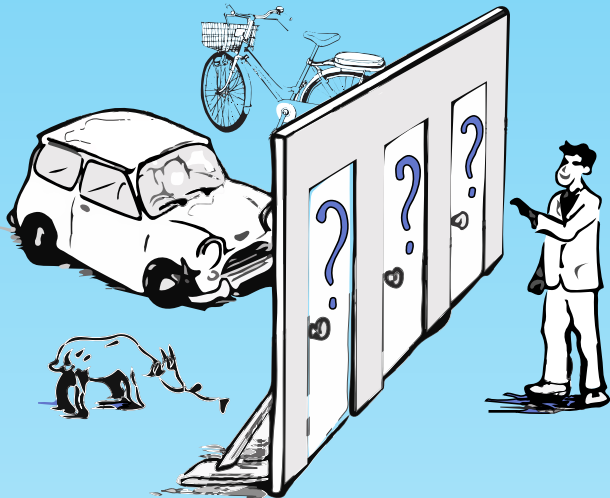
فیلم‌های آموزشی

هفدهم

فصل

احتمال

جفت‌ش زندگی ام حتی: بعید
بودی ولی اتفاق افتادی.



نمای کلی فصل

- درس اول؛ احتمال مقدماتی: فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی / مسائل مربوط به ترکیب / مسائل سکه و فرزند / مسائل تاس
- درس دوم؛ قوانین احتمال
- درس سوم؛ احتمال شرطی
- درس چهارم؛ پیشامدهای مستقل
- درس پنجم؛ قانون احتمال کل

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۷) درس ۱ / ریاضی یازدهم، فصل (۷) درس ۱ / ریاضی دوازدهم، فصل (۷)
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۱)؛ مجموعه / فصل (۱۶)؛ شمارش بدون شمردن
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۲ تا ۳ تست

۱۷

این درس از چهار مبحث «فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی»، «مسائل مربوط به ترکیب»، «مسائل سکه و فرزندی» و «مسائل تاس» تشکیل شده است.



فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی

درس آموز

به اندازه‌گیری شانس وقوع یک پدیده تصادفی، احتمال گفته می‌شود.

پدیده تصادفی: آزمایشی اتفاقی است که نمی‌توان از قبل نتیجه آن را به‌طور قطعی مشخص نمود ولی حالت‌های ممکن برای آن اتفاق را می‌توان مشخص کرد. به‌عنوان مثال، نتیجه مسابقه دو تیم فوتبال A و B، به‌طور قطعی پیش‌بینی‌پذیر نیست اما می‌دانیم این پدیده، دارای ۳ حالت برد A، برد B و تساوی دو تیم می‌باشد.

فضای نمونه (S): به مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک پدیده تصادفی گفته می‌شود و آن را با S نمایش می‌دهند. مثلاً در پرتاب یک سکه، فضای نمونه‌ای S، از دو حالت «پشت» و «رو» تشکیل می‌شود به‌صورت $S = \{R, P\}$ و در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای به‌صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌باشد.

تعداد اعضای فضای نمونه در پرتاب n سکه برابر است با: $n(S) = 2^n$ ، رو آمدن را با R و پشت آمدن را با P نشان می‌دهیم.

مثال آموز: فضای نمونه در پرتاب ۱ سکه و ۲ سکه را بنویسید.

۱ سکه: $S = \{R, P\} \Rightarrow n(S) = 2^1 = 2$

۲ سکه: $S = \{RR, RP, PR, PP\} \Rightarrow n(S) = 2^2 = 4$

پاسخ:

اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم یا n سکه را با هم پرتاب کنیم، فرقی نمی‌کند و داریم: $n(S) = 2^n$

تست آموز: ۵ سکه را هر کدام ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه چند عضو دارد؟

پاسخ: وقتی ۵ سکه را ۱۰ بار پرتاب کنیم، مانند آن است که ۵۰ سکه (۵ × ۱۰ = ۵۰) را با هم پرتاب کرده‌ایم پس داریم:
 گزینه «۴»
 $n(S) = 2^{50}$

فضای نمونه جنسیت فرزندان در خانواده n فرزندی دارای $n(S) = 2^n$ عضو است.

مثال آموز: فضای نمونه جنسیت فرزندان برای یک خانواده ۳ فرزندی و ۴ فرزندی را بنویسید.

پاسخ:

۳ فرزند: $S = \left\{ \begin{matrix} \text{پ د د} \\ \text{د پ د} \\ \text{د د پ} \\ \text{پ پ پ} \end{matrix} \right\} \Rightarrow n(S) = 2^3 = 8$

۴ فرزند: $S = \left\{ \begin{matrix} \text{پ پ پ پ} \\ \text{پ پ پ د} \\ \text{پ پ د پ} \\ \text{پ پ د د} \\ \text{پ د پ پ} \\ \text{پ د پ د} \\ \text{پ د د پ} \\ \text{پ د د د} \end{matrix} \right\} \Rightarrow n(S) = 2^4 = 16$



فیلم‌های آموزشی

آمار

آمار تو را از کجاییم که در این شهر / هر
کس که تو را دیده هواخواه تو گشته



نمای کلی فصل

- درس اول؛ مفاهیم مقدماتی: مقدمه‌ای بر علم آمار / متغیر و انواع آن
- درس دوم؛ آمار توصیفی و شاخص‌های مرکزی: آمار توصیفی و میانگین / میانه
- درس سوم؛ معیارهای پراکندگی: معیارهای پراکندگی و دامنه تغییرات / واریانس / انحراف معیار / ضریب تغییرات

محتوا و جایگاه

- ✓ شامل: ریاضی دهم، فصل (۷) درس‌های ۲ و ۳ / ریاضی یازدهم، فصل (۷) درس ۲
- ✓ پیش‌نیازهای فصل: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
- ✓ بودجه‌بندی کنکور: مستقیم: ۰ تا ۱ تست

این درس از دو مبحث «مقدمه‌ای بر علم آمار» و «متغیر و انواع آن» تشکیل شده است.



مقدمه‌ای بر علم آمار

درس‌آموز

علم آمار، علم نتیجه‌گیری و پیش‌بینی از روی داده‌هاست. بررسی داده‌ها و نتیجه‌گیری از آن‌ها در علم آمار ابتدا اعداد و ارقام داده‌ها را جمع‌آوری و آن‌ها را سازمان‌دهی و مرتب می‌کنیم، در مرحله بعد داده‌های مرتب‌شده را تحلیل و در نهایت براساس تحلیل انجام شده، نتیجه‌گیری می‌کنیم.



علم آمار: مجموعه‌ای از روش‌هایی است که با جمع‌آوری داده‌ها و اعداد و ارقام و سازمان‌دهی آن‌ها، با تحلیل و تفسیر داده‌ها به نتیجه‌گیری و پیش‌بینی مناسبی در رابطه با پدیده‌های تصادفی منتهی می‌شود.

اولین قدم در استفاده از علم آمار، جمع‌آوری داده‌ها است و نتیجه استفاده از علم آمار، پیش‌بینی و نتیجه‌گیری برای آینده (پدیده‌های تصادفی) می‌باشد.

تست‌آموز: کدام گزینه درست است؟

- (۱) سازمان‌دهی و نمایش داده‌ها، اولین قدم در بررسی آماری است.
- (۲) در علم آمار، بلافاصله بعد از جمع‌آوری داده‌ها، به نتیجه‌گیری و پیش‌بینی می‌رسیم.
- (۳) نتیجه استفاده از علم آمار، پیش‌بینی پدیده‌های قطعی در آینده است.
- (۴) بر مبنای تحلیل و تفسیر داده‌های سازمان‌دهی‌شده آماری، می‌توان نتیجه‌گیری کرد.

پاسخ:

- گزینه (۱): نادرست است زیرا اولین قدم در علم آمار، جمع‌آوری داده‌ها است.
- گزینه (۲): نادرست است زیرا بعد از جمع‌آوری داده‌ها، ابتدا آن‌ها را سازمان‌دهی کرده، و بعد از تحلیل و تفسیر داده‌های آماری به نتیجه‌گیری و پیش‌بینی می‌رسیم.
- گزینه (۳): نادرست است زیرا نتیجه استفاده از علم آمار، پیش‌بینی پدیده‌های تصادفی است نه پدیده‌های قطعی.
- گزینه (۴): صحیح است زیرا بر مبنای تفسیر داده‌های آماری، نتیجه‌گیری و پیش‌بینی پدیده‌های تصادفی حاصل می‌شود.

جامعه یا جمعیت: به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت گفته می‌شود؛ هریک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامیم.

اندازه یا حجم جامعه: به تعداد اعضای جامعه گفته می‌شود.

نمونه: بخشی از جامعه است که برای مطالعه و بررسی آماری انتخاب می‌شود و هریک از افراد یا اشیای انتخاب‌شده را عضو نمونه می‌گوییم.

اندازه یا حجم نمونه: به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه یا حجم نمونه گفته می‌شود.

سرشماری: به مطالعه تمام اعضای جامعه سرشماری گفته می‌شود.

تست‌آموز: چند گزاره از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (الف) سرشماری یعنی مطالعه تمام اعضای جامعه
- (ب) حجم جامعه یعنی تعداد اعضای جامعه
- (ج) جامعه به مجموعه تمام افراد یا اشیاء گفته می‌شود که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد.
- (د) نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه آماری است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: همه جملات گفته‌شده درست هستند.

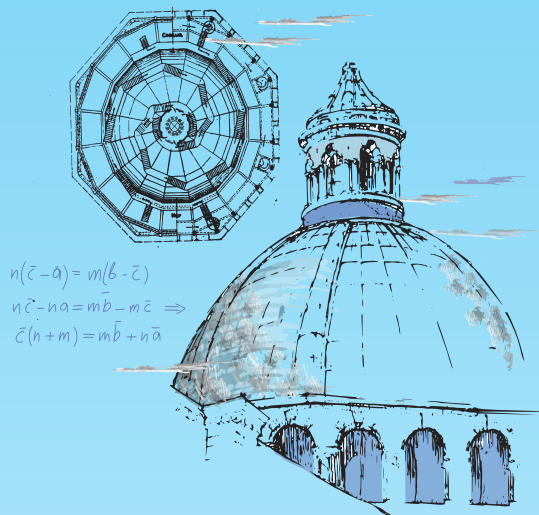


فیلم‌های آموزشی

فصل نوزدهم

هندسه دوازدهم

دور عشق طواف کن؛ بگذار که عشق
مرکز خانه‌ات باشد.



$$\begin{aligned} n(\bar{c}-\bar{a}) &= m(\bar{b}-\bar{c}) \\ n\bar{c}-na &= m\bar{b}-m\bar{c} \Rightarrow \\ \bar{c}(n+m) &= m\bar{b}+n\bar{a} \end{aligned}$$

نمای کلی فصل

- درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی: تفکر تجسمی / دوران / برش / مقاطع مخروطی
- درس دوم: بیضی: تعریف بیضی / خروج از مرکز بیضی / انواع بیضی
- درس سوم: دایره: تعریف دایره / معادله استاندارد دایره / معادله گسترده دایره / اوضاع نسبی خط و دایره / مماس بودن دایره بر محور طول‌ها / مماس بودن دایره بر محور عرض‌ها / مماس بودن دایره بر هر دو محور طول‌ها و عرض‌ها / دایره مماس بر دو خط مقاطع / اوضاع نسبی دو دایره

محتوا و جایگاه

✓ شامل: ریاضی دوازدهم، فصل (۶)

✓ پیش‌نیازهای فصل: فصل (۷)؛ هندسه تحلیلی / فصل (۱۱)؛ هندسه پایه

✓ بودجه‌بندی کنگور: مستقیم: ۱ تا ۲ تست / غیرمستقیم: ۰ تا ۱ تست

این درس از چهار مبحث «تفکر تجسمی»، «دوران»، «برش» و «مقاطع مخروطی» تشکیل شده است.

درس آموز

تفکر تجسمی

تفکر تجسمی شیوه‌ای از تفکر می‌باشد که به جای کلمات، تصاویری در ذهن نقش می‌بندد که به کمک این تصویرسازی ذهنی می‌توانیم به آن موضوع یا موقعیت فکر کنیم. به عنوان نمونه «تجسم ذهنی یک جسم از چرخاندن آن در فضا، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران یک شکل حول یک محور یا نقطه» می‌تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کند.

دوران حول محور: وقتی شکل‌های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شوند، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شوند که در زیر نمونه‌هایی از آن را آورده‌ایم.

۱. دوران مستطیل: شکل حاصل از دوران مستطیل به ابعاد a و b حول یک ضلع خود یک استوانه خواهد بود.

استوانه‌ای به ارتفاع b و شعاع قاعده a

استوانه‌ای به ارتفاع b و شعاع قاعده $\frac{a}{2}$

اگر مستطیل a را حول محوری موازی با یک ضلع آن (مثلاً ضلع a) که به فاصله d ($d \neq 0$) از آن ضلع قرار داد، دوران دهیم، شکل حاصل یک استوانه به شعاع قاعده $b + d$ می‌شود که از داخل آن یک استوانه به شعاع قاعده d برداشته‌ایم.

مربع هم یک‌بُور مستطیل به پس تو نکته بالا، آله به‌بای مستطیل، مربع ببریم هم همین‌طور می‌شه.

در یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h داریم:

$$V = \pi r^2 \times h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r \times h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow \text{مساحت جانبی} + 2(\text{مساحت قاعده}) = \text{مساحت کل}$$

تست آموز: مستطیلی به ابعاد ۴ در ۶ را حول محورهای تقارنش دوران می‌دهیم. کدام یک از مقادیر زیر در هر دو دوران یکسان باقی خواهند ماند؟

(۱) مساحت قاعده

(۲) مساحت جانبی

(۳) مساحت کل

(۴) حجم

پاسخ: با در نظر گرفتن مستطیل و دوران حول محورهای تقارنش خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_{\text{قاعده}} = \pi \times (2)^2 = 4\pi \\ S_{\text{جانبی}} = 2\pi(2) \times 6 = 24\pi \\ S_{\text{کل}} = 2(4\pi) + 24\pi = 32\pi \\ V = \pi(2)^2 \times 6 = 24\pi \end{cases}$$

Lohebartar انتخاب بهترین ها

● پاسخ های کاملاً تشریحی و آموزشی

● چکیده و خلاصه فصل

● کنکورهای سال های گذشته

● سامانه آزمون ساز و فیلم آموزشی

● نمای کلی فصل و بودجه بندی کنکور

● درسنامه های بسیار کامل

● مثال ها و تست های کاربردی

● آزمون های جامع درس و فصل

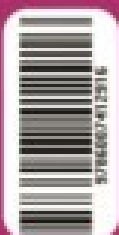
طبقه بندی کاربردی فصل های ریاضیات تجربی

فصل های تابعی

- | | | |
|----|----------------------------|-------------------|
| ۹ | تابع | فصل های تابعی |
| ۵ | معادله های گویا و رادیکالی | |
| ۴ | تعیین علامت و نامعادله | |
| ۸ | تابع قدر مطلق و جز صحیح | |
| ۱۰ | توابع نمایی و لگاریتمی | توابع تابع |
| ۱ | معادله و تابع درجه دوم | |
| ۱۲ | مثلثات | |
| ۱۳ | حد و پیوستگی | بررسی مفاهیم تابع |
| ۱۴ | مشتق | |
| ۱۵ | کاربرد مشتق | |

فصل های غیر تابعی

- | | | |
|----|--------------------------------|----------------|
| ۱ | مجموعه | مجموعه |
| ۲ | الگو و دنباله | |
| ۳ | توان های گویا و عبارت های جبری | |
| ۵ | هندسه تحلیلی | هندسه |
| ۱۱ | هندسه پایه | |
| ۱۹ | هندسه دوازدهم | |
| ۱۶ | شمارش بدون شمردن | |
| ۱۷ | احتمال | |
| ۱۸ | آمار | شمارش و احتمال |



۰۲۱ - ۶۶ ۹۷۱ ۹۷۰ ۶۶ ۹۷۱ ۸۰۴ ۶۶ ۹۷۲ ۴۷۸ ۶۶ ۱۷۵ ۰۵۳
 سایت و سامانه آزمون ساز آنلاین www.Lohebartar.ir

Lohebartarpub



Qrcode

لوهبارتار انتخاب برترین ها

- نمای کلی فصل و بودجه بندی کنکور
- پاسخ های کاملاً تشریحی و آموزشی
- درستنامه های بسیار کامل
- چنگیده و خلاصه فصل
- مثال ها و تست های کاربردی
- کنکورهای سال های گذشته
- آزمون های جامع درس و فصل
- سامانه آزمون ساز و فیلم آموزشی

طبقه بندی کاربردی فصل های ریاضیات تجربی

فصل های تابعی

- تابع
- معادله های گویا و رادیکالی
- تعیین علامت و نامعادله
- تابع آذر مطلق و جز صحیح
- توابع نمایی و لگاریتمی
- معادله و تابع درجه دوم
- مثلثات
- حد و پیوستگی
- مشتق
- کاربرد مشتق

فصل های غیر تابعی

- مجموعه
- الگو و دنباله
- ثوابت های گویا و عبارت های جبری
- هندسه تحلیلی
- هندسه پایه
- هندسه دوازدهم
- شمارش بدون شماردن
- احتمال
- آمار



۰۵۲ ۱۷۵ ۶۶ ۹۷۲ ۷۸ ۶۶ ۹۷۱ ۸۰۴ ۶۶ ۹۷۱ ۹۷۰ ۶۶ ۲۱ -

www.Lohebartar.ir

سایت و سامانه آزمون ساز آنلاین

Lohebartarpub



QR code