

فہستہ ہوک حسابان (۱)

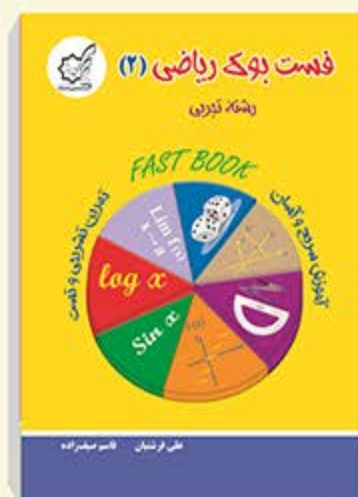
پایہ یازدہم

آموزش سریع، آسان
 تمرین تشریحی و تست

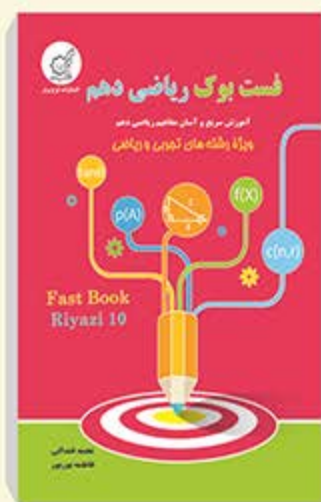
Fast Book



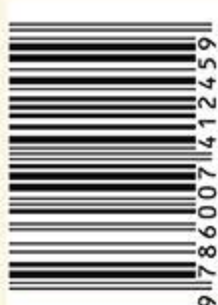
لوحة برتر انتخاب برتر ✓



فست بوک ریاضی (۲)
(رشته تجربی)



فست بوک ریاضی دهم
(رشته ریاضی و تجربی)



تهران انقلاب خیابان کارگر جنوبی بین لایلی نژاد و جمهوری پلاک ۱۲۱۴
۶۶۹۷۱۸۰۴ - ۶۶۹۷۱۹۷۰ - ۶۶۱۷۵۰۵۳
www.Lohebartar.ir
Lohebartar@gmail.com

@Lohebartarpub



QRcode

فہستہ بوک حسابان (۱) پایہ یازحم

آموزش سریع و آسان
تمرین تشریحی و تست

مؤلفان

صدیقہ ابراہیمی، مریم محمدزادہ مدیری

انشارات لوح برتر



فهرست

فصل اول: جبر و معادله

آموزش و تمرین	۶
مثال و پاسخ	۷
سؤالات تشریحی	۸
پاسخ سؤالات تشریحی	۹
تست‌های فصل اول	۶۴
پاسخ تست‌های فصل اول	۶۶

فصل دوم: تابع

آموزش و تمرین	۷۰
مثال و پاسخ	۷۱
سؤالات تشریحی	۷۴
پاسخ سؤالات تشریحی	۷۵
تست‌های فصل دوم	۱۱۰
پاسخ تست‌های فصل دوم	۱۱۲

فصل سوم: تابع نمایی و لگاریتمی

آموزش و تمرین	۱۱۶
مثال و پاسخ	۱۱۷
سؤالات تشریحی	۱۲۲
پاسخ سؤالات تشریحی	۱۲۳
تست‌های فصل سوم	۱۳۷
پاسخ تست‌های فصل سوم	۱۳۹

آزمون نوبت اول

آزمون نوبت اول	۱۴۳
----------------	-----

فصل چهارم: مثلثات

آموزش و تمرین	۱۴۸
مثال و پاسخ	۱۴۹
سؤالات تشریحی	۱۵۲
پاسخ سؤالات تشریحی	۱۵۳
تست‌های فصل چهارم	۱۸۵
پاسخ تست‌های فصل چهارم	۱۸۷

فصل پنجم: حد و پیوستگی

آموزش و تمرین	۱۹۰
مثال و پاسخ	۱۹۱
سؤالات تشریحی	۱۹۸
پاسخ سؤالات تشریحی	۱۹۹
تست‌های فصل پنجم	۲۵۰
پاسخ تست‌های فصل پنجم	۲۵۲

آزمون نوبت دوم

آزمون نوبت دوم	۲۵۵
----------------	-----

پاسخ تشریحی آزمون نوبت اول و دوم

پاسخ تشریحی آزمون نوبت اول	۲۶۰
پاسخ تشریحی آزمون نوبت دوم	۲۶۲

به نام او که هر چه داریم از اوست

مقدمه ناشر

با استقبال بی نظیر دانش آموزان عزیز از فست بوک های ریاضی هفتم، هشتم، نهم و دهم و درخواست بسیاری از دبیران فرهیخته متوسطه دوم، با عنایت پروردگار و همت گروه مؤلفان توانستیم مجموعه حاضر را با نام «**فست بوک حسابان (۱)**» پایه یازدهم با رویکرد آموزشی، یک صفحه آموزش و تمرین، یک صفحه مثال و پاسخ، طراحی و تدوین کنیم.

برای آشنایی بیش تر شما عزیزان با این مجموعه، برخی از ویژگی های اصلی آن را با هم مرور می کنیم:

۱- کتاب حاضر کلیه مباحث کتاب درسی پایه یازدهم رشته ریاضی را مطابق کتاب جدید التالیف دربرمی گیرد. مؤلفان این مجموعه تمام تلاش خود را به کار برده اند تا همه نکات کلیدی درس ها و تمرین های کتاب درسی را آموزش دهند.

۲- سعی کرده ایم با زبانی ساده و روان، تمام مفاهیم درسی را آموزش دهیم. به طور کلی ساختار این کتاب به گونه ای است که صفحات زوج به آموزش و تمرین و صفحات فرد به حل مثال اختصاص داده شده است.

۳- هر فصل به چند درس تقسیم شده است و در ابتدا، بخش آموزش و سپس سؤالات تشریحی آن درس با پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی ارائه شده است.

۴- در پایان هر فصل تعدادی تست کنکور و تالیفی با پاسخ های کاملاً تشریحی و آموزشی مطابق با کتاب درسی ارائه شده است.

۵- آزمون های تشریحی ۲۰ نمره ای ویژه نیم سال اول در پایان فصل سوم و آزمون پایان سال در انتهای کتاب تکمیل کننده این مجموعه است.

۶- برای دانش آموزان مستعدتر، در پایان برخی از فصل ها، مطالبی فراتر از سطح کتاب درسی با نام «بیش تر بدانیم» ارائه شده است.

۷- برای حل تست های بیش تر به کتاب «تست فست بوک حسابان (۱)» مراجعه کنید.

حجم مناسب و جامع بودن این کتاب برای دانش آموزان بسیار هیجان انگیز است. ساختار آموزش سریع این مجموعه به گونه ای طراحی شده است که کار دیر را در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش آموزان، ساده و آسان تر می کند. در ضمن توجه داشته باشید که نام «فست بوک» به خاطر ساختار آموزشی سریع کتاب است نه حجم و تعداد صفحات آن. امید است این مجموعه مورد استقبال دبیران فرهیخته، دانش آموزان عزیز و اولیای گرامی قرار گیرد. شما عزیزان می توانید نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق پل های ارتباطی زیر با ما در میان بگذارید.

صادق گرچی

مدیر انتشارات لوح برتر

پل های ارتباطی شما با ما

۶۶۹۷۲۴۷۸

۶۶۹۷۱۸۰۴

۶۶۹۷۱۹۷۰

۶۶۱۷۵۰۵۳

کانال انتشارات @Lohebartarpub

شماره تلگرام: ۰۹۳۶۰۴۷۵۱۲۵

سایت: Lohebartar.ir

پست الکترونیکی: Lohebartar@gmail.com

سامانه پیامکی: ۳۰۰۰۵۳۶۴۰۰۰۵۳۶



فهرست داخلی فصل اول (جبر و معادله)

۶	درس اول: مجموع جملات دنباله حسابی.....
۱۲	درس دوم: مجموع جملات دنباله هندسی
۱۸	درس سوم: معادلات درجه دوم
۲۲	درس چهارم: صفرهای تابع
۴۰	درس پنجم: رسم نمودار تابع‌های قدرمطلق
۵۲	درس ششم: مختصات
۶۴	تست‌های فصل اول
۶۶	پاسخ تشریحی تست‌های فصل اول

آموزش و تمرین

مجموع جملات دنباله حسابی

در کتاب ریاضی دهم با مفهوم دنباله و انواع آن آشنا شدید. می‌دانید دنباله اعداد طبیعی به صورت $1, 2, \dots, n$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 1$ است.

برای به دست آوردن مجموع n جمله اول این دنباله می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

جملات را از انتها به ابتدا نیز جمع می‌کنیم:

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ تا}}$$

حال جملات دو عبارت بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2S = n(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

فرمول محاسبه مجموع n جمله اول اعداد طبیعی

تمرین: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰ را حساب کنید.

$$S = \frac{10(10+1)}{2} = 55$$

✓ پاسخ:

حال به شیوه بالا می‌خواهیم مجموع n جمله اول دنباله حسابی $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$ را محاسبه کنیم که در آن a_1 جمله اول و d قدرنسبت است:

$$S = a_1 + [a_1 + d] + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$S = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \dots + [a_1 + d] + a_1$$

$$2S = \underbrace{[2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d]}_{n \text{ بار}}$$

$$2S = n[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

همچنین با توجه به این که جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ است پس می‌توان نوشت:

$$S_n = \frac{n}{2} \left[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} \right] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

فرمول محاسبه مجموع n جمله اول دنباله حسابی برحسب جمله اول و جمله آخر

مثال و پاسخ

مثال (۱): مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی ۳, ۷, ۱۱, ... را بیابید.

پاسخ: جمله اول این دنباله $a_1 = 3$ و قدرنسبت آن $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ و $n = 10$ لذا:

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2(3) + (10-1) \times 4] = 210$$

مثال (۲): در دنباله حسابی ۳, ۹, ۱۵, ... حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش تر شود؟ (نهایی دی)

پاسخ: جمله اول $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d = 9 - 3 = 6$ می باشد. می خواهیم n را چنان بیابیم که $S_n > 300$

$$S_n = \frac{n}{2} [2 \times 3 + (n-1) \times 6] > 300$$

شود:

$$= \frac{n}{2} [2 + 6n - 6] > 300 \Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

لذا حداقل باید ۱۱ جمله را جمع کنیم تا مجموع از ۳۰۰ بیش تر شود.

مثال (۳): مجموع جمله های هفتم و بیست و چهارم یک دنباله حسابی برابر ۱۰۰ است. مجموع ۳۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_7 + a_{24} = a_1 + 6d + a_1 + 23d = 100 \Rightarrow \underbrace{2a_1 + 29d}_{\checkmark} = 100$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2a_1 + (30-1)d] = 15(2a_1 + 29d) = 15 \times 100 = 1500$$

مثال (۴): در یک دنباله حسابی جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله را بیابید. (سراسری)

پاسخ: برای محاسبه جمله اول و جمله پانزدهم در جمله عمومی به جای n عدد ۱ و ۱۵ را قرار می دهیم، داریم:

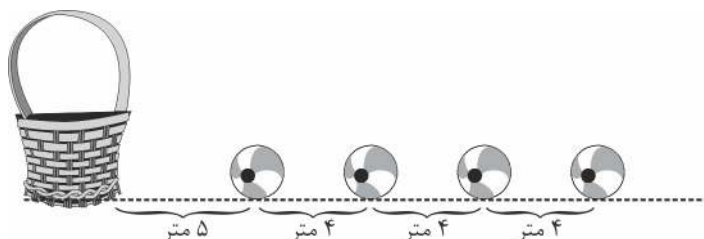
$$a_1 = \frac{3}{2}(1) - 5 = \frac{3}{2} - 5$$

$$a_{15} = \frac{3}{2}(15) - 5 = \frac{45}{2} - 5$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \left[\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5 \right] = \frac{15}{2} (24 - 10) = 105$$

سؤالات تشریحی درس اول

- ۱- در یک دنباله حسابی مجموع ۴ جمله اول ۱۵ و مجموع ۵ جمله بعدی ۳۰ است. جمله یازدهم دنباله را بیابید.
(سراسری خارج)
- ۲- در دنباله حسابی $2, 6, 10, \dots$ حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیش تر شود؟
(نهایی)
- ۳- در دو دنباله حسابی $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟
(سراسری خارج)
- ۴- در یک دنباله حسابی که ۲۰ جمله دارد، مجموع جملات با شماره زوج ۸۰ و مجموع همه جملات ۱۵۵ است. جمله پنجم دنباله کدام است؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)
- ۵- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ را بیابید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)
- ۶- در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول، $\frac{1}{3}$ مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟
(سراسری خارج)
- ۷- محصول تولید لوله های فولادی کارخانه ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن است. قرار است تولید این لوله ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد، مجموع تولید لوله ها را در دهه ۹۰ حساب کنید.
- ۸- در زندگی واقعی خود مسئله ای طرح کنید که بیانگر دنباله حسابی باشد.
- ۹- تعداد ۱۰ توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۴ متر از هم قرار دارند. دونه ای می خواهد از کنار یک سبد که تا اولین توپ ۵ متر فاصله دارد، شروع به حرکت کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل و به داخل آن بیندازد. این دونه مجموعاً چند متر دویده است؟



پاسخ سؤالات تشریحی درس اول

۱-

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 15 \\ a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2}, a_1 = 3 \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10d \Rightarrow a_{11} = 3 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۲-

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1)4) > 200$$

$$\Rightarrow 4n^2 > 400 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10$$

حداقل ۱۱ جمله را باید جمع کرد.

۳-

$$\begin{aligned} 2, 7, 12, \dots & \quad d_1 = 5 \\ 8, 11, 14, \dots & \quad d_2 = 3 \end{aligned}$$

در دنباله جملات مشترک قدرنسبت برابر ک.م.م دو قدرنسبت d_1 و d_2 است.

دنباله جملات مشترک را می‌نویسیم:

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow 17 + (n-1)5 = 15n + 2$$

جمله عمومی این دنباله

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \Rightarrow 7 \leq n \leq 66$$

$$\text{پس تعداد کل } = 60 = 66 - 7 + 1$$

۴-

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 80 \xrightarrow[\text{قدرنسبت } 2d]{\text{جمله } 10} S = \frac{10}{2}[2a_2 + 9(2d)] = 80 \\ S_{20} = \frac{20}{2}[2a + (20-1)d] = 155 \end{cases}$$

$$\nearrow \begin{matrix} a+d \\ \nearrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2a_2 + 18d = 16 \\ 20a + 190d = 155 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 20d = 16 \\ 20a + 190d = 155 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 10d = 8 \\ 2a + 19d = 15.5 \end{cases} \Rightarrow a = 3, d = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_5 = a + 4d = 3 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

۵-

در واقع باید مجموع جملات دنباله حسابی متناهی زیر را بیابیم:

$$3, 9, 15, \dots, 99$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow 99 = 3 + (n-1)6 \Rightarrow n = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (3 + 99) = 867$$

۶-

$$S_\Delta = \frac{1}{3} (S_{10} - S_\Delta) \Rightarrow 3S_\Delta = S_{10} - S_\Delta \Rightarrow S_{10} = 4S_\Delta \quad (*)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \begin{cases} S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) \\ S_\Delta = \frac{\Delta}{2} (2a_1 + 4d) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 10(2a_1 + 4d) \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۷-

تولید در سال اول یعنی آغاز سال ۹۰ تا آغاز سال ۹۱ برابر ۱۹ میلیون تن است.

$$a_1 = 19, \quad d = 4, \quad n = 10$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{10}{2} (2 \times 19 + 9 \times 4) = 370 \text{ میلیون تن}$$

۸-

خانواده آقای احمدی برای خرید یک تلویزیون بدون پیش پرداخت در ماه اول ۵۰۰/۰۰۰ و ماه دوم ۷۰۰/۰۰۰ تومان و بدین ترتیب هر ماه ۲۰۰/۰۰۰ تومان بیش تر از ماه قبل چک داده اند. چقدر طول می کشد تا بهای تلویزیون را که ۶ میلیون تومان است، پرداخت کنند.

$$a = 500/000 \quad d = 200/000$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$6/000/000 = \frac{n}{2} [2(500/000) + (n-1)(200/000)]$$

$$12/000/000 = n[1/000/000 + 200/000n - 200/000] = 800/000n + 200/000n^2$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } 200/000} 60 = 4n + n^2 \Rightarrow n^2 + 4n - 60 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(-60) = 256$$

$$n - \frac{-4 \pm 16}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = -10 & \text{غیرقابل قبول} \\ n = 6 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۹-

دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد مسافت $5 \times 2 = 10$ متر را طی می کند و برای توپ دوم $2(5 + 4) = 18$ متر و برای توپ سوم $2(5 + 4 + 4) = 26$ بنابراین مسافت های طی شده تشکیل یک دنباله حسابی می دهند:

$$10, 18, 26, \dots \quad n=10, \quad a_1=10, \quad d=8$$

$$S = \frac{10}{2} [2 \times 10 + (10-1)8] = 5(20 + 72) = 5 \times 92 = 460 \text{ متر}$$

آموزش و تمرین

مجموع جملات دنباله هندسی

در سال گذشته با دنباله هندسی آشنا شدید. دنباله $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ ($q \neq 1$) دنباله هندسی است. a جمله اول و q قدرنسبت نامیده می شود و از تقسیم هر جمله بر جمله ماقبل به دست می آید. می خواهیم مجموع n جمله اول این دنباله را محاسبه کنیم:

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

حال Sq را تشکیل می دهیم و با محاسبه $S - Sq$ به هدف خود که پیدا کردن فرمولی برای S می باشد، خواهیم رسید.

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

$$\Rightarrow S - Sq = a + \cancel{aq} + \dots + \cancel{aq^{n-1}} - \cancel{aq} - aq^2 - \dots - \cancel{aq^{n-1}} - aq^n$$

$$\Rightarrow S - Sq = a - aq^n$$

$$\Rightarrow S(1 - q) = a(1 - q^n)$$

$$\Rightarrow S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

فرمول محاسبه مجموع n جمله اول دنباله هندسی	$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$
--	---

نکته: اگر $|q| < 1$ حاصل $a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots$ به $S = \frac{a}{1 - q}$ نزدیک می شود که در آن a جمله اول

و q قدرنسبت است. به $\frac{a}{1 - q}$ حد مجموع گفته می شود.

تمرین (۱): حاصل $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ را بیابید.

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (q = \frac{1}{2} < 1)$$

✓ پاسخ:

توجه کنید که در این حالت باید قدرمطلق قدرنسبت عددی کوچکتر از یک واحد باشد.

تمرین (۲): مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی $2, 8, 32, \dots$ را بیابید.

$$a = 2 \quad q = \frac{8}{2} = 4 \quad n = 10$$

✓ پاسخ:

$$S_{10} = \frac{2(1 - 4^{10})}{1 - 4} = \frac{-2}{3}(1 - 4^{10})$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): در دنباله هندسی ... ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶ جمله اول، چند برابر مجموع ۷ جمله اول آن است؟
(سراسری خارج)

✓ پاسخ:

$$a = 1, q = 2$$

نسبت این دو جمله را محاسبه می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} S_{14} &= \frac{1(1-2^{14})}{1-2} = 2^{14} - 1 \\ S_7 &= \frac{1(1-2^7)}{1-2} = 2^7 - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{14}}{S_7} = \frac{2^{14} - 1}{2^7 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{14}}{S_7} = \frac{(2^7 - 1)(2^7 + 1)}{2^7 - 1} = 2^7 + 1 = 129$$

پس ۱۲۹ برابر است.

مثال (۲): کارمندی سالانه ۱۴ میلیون تومان حقوق دریافت می‌کند. اگر هر سال ۱۰٪ به حقوق او افزوده شود، مجموع حقوق دریافتی او پس از گذشت ۳۰ سال چه قدر است؟

✓ پاسخ:

$$a = 14 \text{ میلیون}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{14/000/000 + 10\% \times 14/000/000}{14/000/000} = \frac{15/400/000}{14/000/000} = 1/1 \Rightarrow q = 1/1$$

$$S_{30} = \frac{14/000/000(1-(1/1)^{30})}{\underbrace{1-1/1}_{-0/1}} = 140/000/000((1/1)^{30} - 1)$$

مثال (۳): در یک دنباله هندسی جمله اول ۳ و جمله چهارم ۲۴ است. مجموع ۱۰ جمله اول دنباله را بیابید.

✓ پاسخ:

$$a_1 = a = 3, \quad a_4 = aq^3 = 24$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{aq^3}{a} = q^3 = \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$S_{10} = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = -3(1-2^{10}) = -3 \times -1023 = 3069$$

مثال و پاسخ

مثال (۴): جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = 2^{n+1}$ می باشد. مجموع چند جمله از این دنباله هندسی ۱۲۴ است؟

پاسخ: جملات دنباله $4, 8, 16, \dots$ است. لذا $a_1 = 4$ و $q = 2$.

$$S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} = 4(2^n - 1) \Rightarrow 4(2^n - 1) = 124 \Rightarrow 2^n - 1 = 31 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

مثال (۵): حاصل $\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots}$ را بیابید.

پاسخ: صورت کسر مجموع جملات یک دنباله هندسی با $a = 1$ و $q = \frac{1}{2}$ است و در مخرج کسر نیز $a = 1$ و $q = \frac{1}{3}$ می باشد. لذا حد مجموع صورت و مخرج کسر را حساب می کنیم.

$$A = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

مثال (۶): در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ است. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد چقدر است؟ (سراسری)

پاسخ: سه جمله را به صورت a, aq, aq^2 در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} a \times aq \times \frac{a}{q} = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6 \\ \frac{a}{q} + a + aq = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q - 13 = 0 \end{cases}$$

ضرب طرفین در q

$$6q^2 - 13q + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 \quad q = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ q = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$q = \frac{3}{2} \Rightarrow 4, 6, 9$$

$$q = \frac{2}{3} \Rightarrow 9, 6, 4$$

لذا این جملات به یکی از صورت های زیر است:

پس تفاضل کوچکترین و بزرگترین برابر ۵ است.

سؤالات تشریحی درس دوم

۱- مجموع چند جمله از دنباله $6, -12, 24, \dots$ (با شروع از جمله اول) ۱۲۶- است؟ (نهایی خرداد)

۲- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ (سراسری)

۳- حاصل $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ به ازای $x = \sqrt{3}$ بیابید.

۴- مجموع جملات $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ را بیابید.

۵- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ را به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ بیابید. (سراسری ریاضی)

۶- در زندگی واقعی خود مثالی از یک دنباله هندسی طراحی کنید.

۷- بر محیط دایره‌ای ۱۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را بیابید.

۸- تعداد جمله‌های یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله، ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن را بیابید.

پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم

۱-

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -126 \Rightarrow 1-(-2)^n = -63$$

$$(-2)^n = 64 \Rightarrow (-2)^n = (-2)^6 \Rightarrow n = 6$$

۲-

$$\begin{cases} S_3 = 136 \\ S_6 = 153 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \times \frac{1-q^3}{1-q} = 136 \\ a_1 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 153 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{136}{153} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^3}{1-q^6} = \frac{1-q^3}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{8}{9} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{\cancel{a_1} q^4}{\cancel{a_1} q^5} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = 16$$

۳-

$$(1-x+x^2-x^3+x^4) = \frac{1(1-(-x)^5)}{1-(-x)} = \frac{1+x^5}{1+x} \quad (q = -x, a = 1)$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{1(1-x^5)}{1-x} \quad (a = 1, q = x)$$

$$\Rightarrow (1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4) = \frac{1+x^5}{1+x} \times \frac{1-x^5}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{10}}{1-x^2} = \frac{1-(\sqrt{2})^{10}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^{10} - 1)$$

۴-

$$(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

۵-

$$\frac{t^1 + t^0 + t^1 + \dots + t^1 + 1}{t^1 + t^0 + t^1 + 1} = \frac{1(1-t^1)}{1-t} = \frac{1-t^1}{1-t} = \frac{(1+t+t^1)(1-t)}{1-t} = 1+t+t^1 = 1+1=2$$

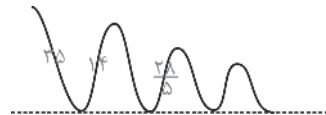
$$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2t+1 = \sqrt{5} \Rightarrow (2t+1)^2 = 5 \Rightarrow 4t^2 + 4t + 1 = 5 \Rightarrow t^2 + t = 1$$

۶-

یک توپ بسکتبال از ارتفاع ۳۵ متری رها می شود و هر بار که به زمین می خورد $\frac{2}{5}$ ارتفاع قبلی خود بالا می آید. در مجموع این توپ تا هنگام توقف چند متر جابه جا شده است؟

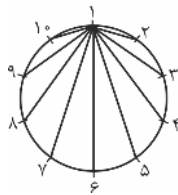
ارتفاع دنباله $35, 14, \frac{28}{5}, \dots$

مسافت دنباله $35, 28, \frac{56}{5}, \dots$



$$S = 35 + \frac{28}{1 - \frac{2}{5}} = 35 + \frac{28}{\frac{3}{5}} = 35 + \frac{140}{3} = \frac{245}{3}$$

۷-



نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می کنیم، مطابق شکل زیر ملاحظه می کنید که ۹ وتر پدید می آید. به همین ترتیب با وصل کردن نقطه دوم به سایر نقطه ها ۸ وتر پدید می آید و ...

$$9 + 8 + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{9(9+1)}{2} = \frac{9}{2} \times 10 = 45$$

۸-

جملات دنباله که تعداد آن ها زوج است را به صورت $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ در نظر می گیریم و مجموع تمام جملات را

$$S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

حساب می کنیم:

از طرفی جملات با ردیف فرد به صورت $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ می باشند که دنباله هندسی با قدرنسبت $(\frac{a_3}{a_1} = q^2)$

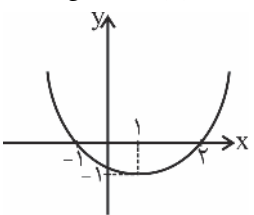
$$S = \frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$$

هستند. لذا مجموع آن ها به صورت

$$S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)} \xrightarrow[\text{مساوی از طرفین}]{\text{حذف جملات}} \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow q = 2$$

آزمون

نوبت اول

ردیف	سؤالات	بارم
۱	مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۵ را بیابید.	۱
۲	جمله عمومی یک دنباله $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ است. مجموع ده جمله اول این دنباله را بیابید.	۱
۳	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.	۱
۴	سهمی $y = \frac{1}{4}(x-2)(x-6)$ را رسم کنید. صفرهای تابع را مشخص کنید.	۱/۵
۵	در شکل مقابل علامت و تعداد ریشه‌ها و علامت ضرایب را در معادله $f(x) = 0$ مشخص کنید. 	۱
۶	معادله $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$ را حل کنید.	۱
۷	اگر $x = 4$ جواب معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{ax-a}{x^2-4}$ باشد، a را بیابید.	۱/۵

آزمون

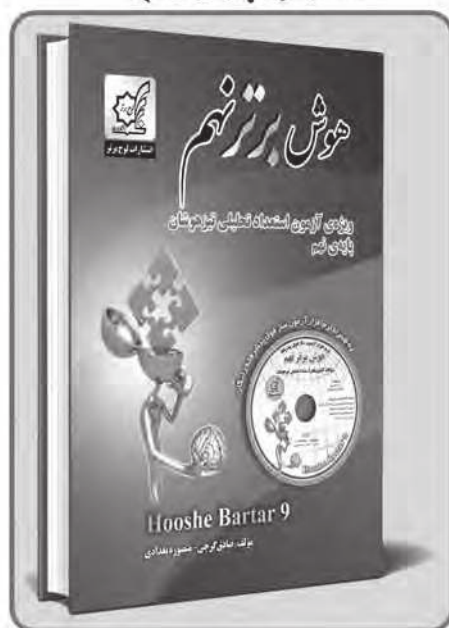
نوبت دوم

ردیف	سؤالات	بارم
۱	در ۲۰ جمله اول يك دنباله حسابي مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.	۱/۲۵
۲	به روش هندسی معادله $x^2 - 2x = x $ را حل کنید.	۱/۲۵
۳	معادله $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$ را به روش جبری حل کنید.	۱
۴	اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس يك مربع و معادله يك ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟	۱/۵
۵	تابعی رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند و ضابطه آن را بنویسید. الف) $f(2) = 3$ ب) دامنه تابع $\mathbb{R}$ باشد. ج) در بازه $[2, +\infty)$ ثابت باشد. د) برای اعداد کوچک‌تر از ۲، به صورت $\sqrt{ax + b}$ باشد.	۱
۶	نشان دهید تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک‌به‌یک نیست. سپس دامنه تابع را چنان محدود کنید که تابعی یک‌به‌یک شود و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.	۱/۵
۷	اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - 1}$ و $g(x) = x^2 + 12$ دامنه و ضابطه fog را به دست آورید.	۱/۵

پاسخ تشریحی

آزمون نوبت اول و دوم

هوش برتر نهم



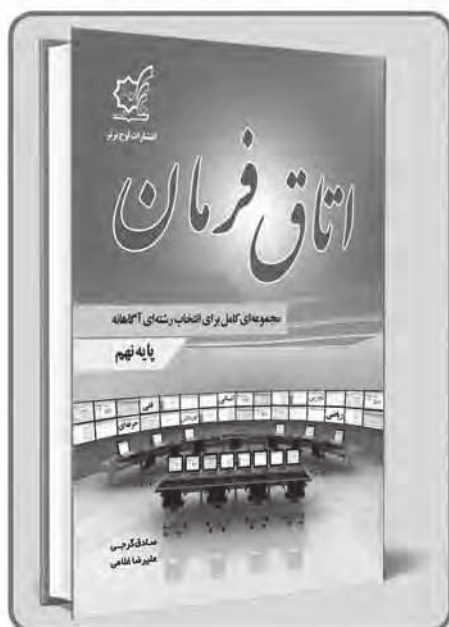
سوالات استعداد تحلیلی آزمون تیزهوشان نهم
با نرم افزار آزمون ساز رایگان

اسمارت نهم



آموزش ریاضی تیزهوشان و نمونه دولتی نهم
با نرم افزار آزمون ساز رایگان

اتاق فرمان نهم



انتخاب رشته آگاهانه و موفق در پایه نهم

فست بوک ریاضی نهم

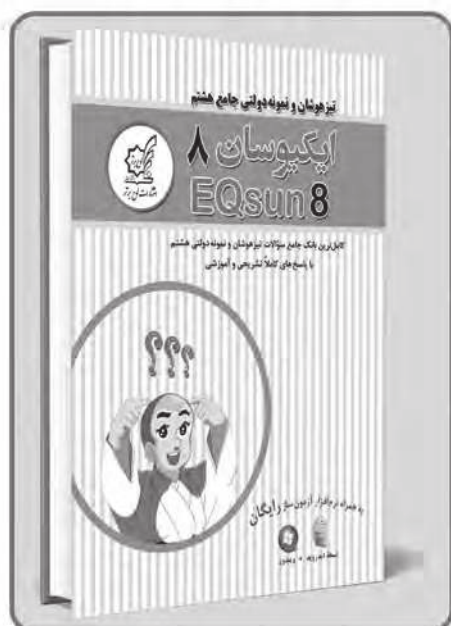


آموزش سریع، آسان و کامل ریاضی



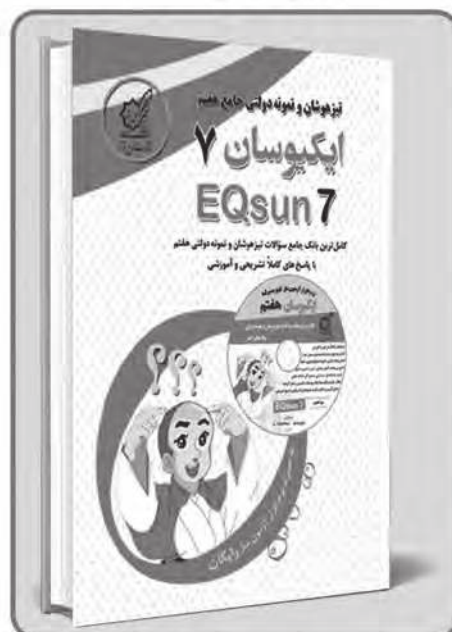
برای آشنایی بیشتر و دریافت بخشی از متن کتابها QRcode مقابل را اسکن کنید.

ایکیوسان هشتم



کامل ترین بانک سؤالات تیزهوشان و نمونه دولتی
تمام دروس پایه هشتم (با نرم افزار آزمون ساز رایگان)

ایکیوسان هفتم



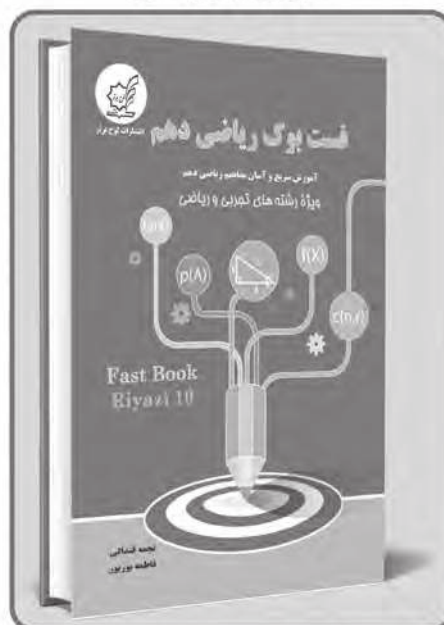
کامل ترین بانک سؤالات تیزهوشان و نمونه دولتی
تمام دروس پایه هفتم (با نرم افزار آزمون ساز رایگان)

دکتر شو زیست دهم لوح برتر آموزش و تست کنکور



آموزش به سبک کنکور همراه با تست های جامع
(با نرم افزار آزمون ساز رایگان)

فست بوک ریاضی دهم تجربی و ریاضی



آموزش سریع، آسان و جامع ریاضی