انتشارات لوح برتر

فست بوک ریاضی نهم

آموزش سریع، آسان و کامل

صفحات زوج آموزش، صفحات فرد مثال

زهرا اسدی
فاطمه بوربور

آموزش سریع، آسان و کامل ریاضی با فست بوک‌های لوح برتر

فست بوک ریاضی نهم

۱ـ پوشش تمامی مباحث کتاب درسی

۲ـ ساختار سریع و آسان

۳ـ صفحات زوج آموزش، صفحات فرد مثال

٤ـ انواع تمرین‌ها و مثال با پاسخ تشریحی

۵ـ ارائه بخش «بیشتر بدانیم» در انتهای هر درس

۶ـ دو دوره آزمون تشریحی ترم اول و دوم با پاسخ و بدون پاسخ تشریحی

انتشارات لوح برتر با کتاب‌های کاملاً متفاوت

۰۲۱ _ ۶۶۱۷۵۰۵۳ ۶۶۹۷۱۹۷۰ ۶۶۹۷۱۸۰٤

۶۶۹۷۲٤۷۸ ۹۱۰ ۷۰۱۳۰

Lohebartarpub Lohebartar www.Lohebartar.ir

سامانه پیامکی: ۳۰۰۰ ۵۳۶ ٤۰۰۰ ۵۳۶

فست بوک ریاضی نهم

آموزش سریع، آسان و کامل ریاضی

صفحات زوج آموزش، صفحات فرد مثال

مؤلفان

زهرا اسدی آقابافر

فاطمه بوربور

انتشارات لوح برتر

فهرست

به نام او که هرچه داریم از اوست

مقدمه ناشر

با استقبال بی‌نظیر دانش‌آموزان عزیز از کتاب فست‌بوک ریاضی هفتم و درخواست بسیاری از دبیران فرهیخته متوسطه اول، مجموعه حاضر با نام «**فست‌بوک ریاضی نهم**» با رویکرد آموزشی، یک صفحه آموزش، یک صفحه مثال، طراحی و تدوین گردید.

ویژگی اصلی این کتاب آن است که اولاً تمام مباحث کتاب درسی پایهٔ نهم را مطابق کتاب جدیدالتألیف دربرمی‌گیرد وثانیاً با زبانی ساده، تمام مفاهیم ریاضی نهم را آموزش می‌دهد. به طور کلی صفحات زوج به آموزش و صفحات فرد به حل مثال، اختصاص داده شده است. در پایان هر فصل برای دانش‌آموزان مستعدتر، مطالبی فراتر از سطح کتاب درسی با نام «بیش‌تر بدانیم» ارایه شده است. در پایان فصل (۴) دو دوره آزمون نوبت اول و در پایان کتاب نیز دو دوره آزمون نوبت دوم، با پاسخ و بدون پاسخ، تکمیل‌کنندهٔ این کتاب کاربردی است.

قابلیت حمل آسان و جامع بودن این کتاب برای دانش‌آموزان هیجان‌انگیز است و کار دبیران گرامی با استفاده از این مجموعه، در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان، بسیار ساده و آسان خواهد شد.

امید است این مجموعه مورد استقبال دبیران فرهیخته و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد. انشاء ا...

صادق گرجی
مدیر انتشارات لوح برتر

فصل اول

مجموعه‌ها

آموزش و درسنامه

معرفی مجموعه

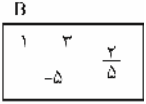
واژه‌ی مجموعه: در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء، کاملاً مشخص و غیرتکراری استفاده می‌شود.

اگر ماه‌های فصل پاییز را داخل دو آکولاد قرار دهیم و بنویسیم؛

{ آذر، آبان، مهر }

یک مجموعه تشکیل داده‌ایم که به هر یک از ماه‌های مهر، آبان و آذر یک عضو از این مجموعه می‌گوییم.

* اعضای مجموعه را با (و) یا (،) از هم جدا می‌کنیم.
* برای نامگذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.
* در نوشتن مجموعه‌ها، جابه‌جایی عضوها مهم نیست و با جابه‌جا کردن عضوها مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود.
* مجموعه را می‌توانیم با استفاده از یک منحنی یا خط شکسته بسته، نمایش دهیم که به آن، نمایش مجموعه با نمودار وِن می‌گوییم.



مثال و تمرین

مثال (۱): مجموعه اعداد فرد یک رقمی را بنویسید.

☑ **پاسخ:** $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$

مثال (۲): مجموعه اعداد زوجِ اول را بنویسید.

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که تنها عدد اول زوج ۲ است و بقیه عددهای زوج مرکب هستند. $B = \{۲\}$

مثال (۳): مجموعه سه عدد فرد متوالی را بنویسید؟

☑ **پاسخ:** برای تشکیل مجموعه باید عضوها کاملاً مشخص باشند و سلیقه‌ی ما در انتخاب آن‌ها نقشی نداشته باشد اما در این سؤال سه عدد فرد متوالی به سلیقه‌های مختلف می‌توانند نوشته شوند مثلاً :

۱۳,۱۵,۱۷ یا ۶۵,۶۷,۶۹

پس تشکیل مجموعه نمی‌دهند.

مثال (۴) : کدام عبارت‌ها نشان دهنده‌ی مجموعه می‌باشند؟

الف) مجموعه حروف بدون نقطه فارسی ب) سه شاعر معروف ایران

☑ **پاسخ:**

الف) مجموعه است چون عضوهای آن کاملاً مشخص می‌باشد.

ب) مجموعه نیست چون در انتخاب اعضا سلیقه افراد دخالت دارد.

آموزش و درسنامه

عضویت و مجموعه تهی

در مجموعه $A=\{b, \text{الف}, \text{مریم}, ۵\}$ برای نشان دادن این‌که ۵ عضوی از مجموعه A است از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $۵ \in A$ که «۵ عضو A است.» خوانده می‌شود و اگر بخواهیم بگوییم فاطمه عضو مجموعه A نیست از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم فاطمه $\notin A$ که «فاطمه عضو A نیست.» خوانده می‌شود.

مجموعه‌ای را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم. مانند مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از صفر.

تمرین: با توجه به مجموعه مقابل درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$A=\left\{۵,-۳,\frac{۲}{۷},۰/۰۴,۱\frac{۱}{۲}\right\}$$

☑ **پاسخ:**

(نادرست) $۰/۰۴ \notin A$ (درست) $-۳ \in A$

(درست) $-۵ \notin A$ (نادرست) $۷ \in A$

مثال و تمرین

مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر دارای چند عضو می‌باشد؟

$A =$ مجموعه اعداد طبیعی بین ۱۰ و ۱۱

$B = \{۲,۳,۴,۳,۵,۳,۶,۳\}$

$C = \{۵^۲,(-۵)^۲,۲۵\}$

$D =$ مجموعه اعداد طبیعیِ یک رقمیِ مضرب ۷ که اول باشند

☑ **پاسخ:** مجموعه A تهی است و هیچ عضوی ندارد چون بین هر دو عدد طبیعی متوالی عدد طبیعی دیگری قرار ندارد.

مجموعه B دارای ۵ عضو است چون در شمارش اعضای یک مجموعه، عضو تکراری فقط یک بار شمرده می‌شود.

مجموعه C نیز دارای یک عضو است؛ چون $۵^۲ = ۲۵$ و $(-۵)^۲ = ۲۵$.

مجموعه D دارای یک عضو است؛ چون اگر مضارب ۷ را بنویسیم:

مضارب عدد طبیعی ۷: $\{۷,۱۴,۲۱,۲۸,...\}$

تنها مضرب یک رقمیِ اول آن ۷ است.

آموزش و درسنامه

مجموعه‌های برابر و زیرمجموعه

مجموعه‌های برابر: دو مجموعه A و B برابر هستند به شرط این‌که هر عضو A عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد و یا در B باشد ولی در A نباشد آن‌گاه مجموعه A و B برابر نیستند یعنی $A \neq B$.

زیرمجموعه: مجموعه A زیرمجموعه B است. اگر تمام اعضای A داخل B باشد، آن را به صورت $A \subseteq B$ می‌نویسیم.

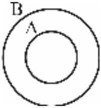
$A = \{۱,۲,۳\}$ $\qquad$ $B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$

اگر بتوانیم عضوی از A بیابیم که در B نباشد می‌گوییم A زیرمجموعه B نیست و آن را به صورت $A \not\subseteq B$ می‌نویسیم.

* هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است. $\qquad A \subseteq A$

* مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای می‌باشد. $\qquad \varnothing \subseteq F$

* اگر بخواهیم $A \subseteq B$ را با نمودار وِن نمایش دهیم به صورت زیر خواهد بود.



* وقتی $A \subseteq B$ باشد همه‌ی اعضای A در B وجود دارد اما ممکن است عضوی در B باشد که در مجموعه‌ی A نباشد.

مثال و تمرین

مثال (۱) : آیا دو مجموعه $A=\{۵,۸,-۳\}$ و $B=\left\{۵,-۳,\frac{۱۵}{۳},۸\right\}$ با هم برابرند؟

☑ **پاسخ**: بله، چون $B=\left\{۵,-۳,\underset{۵}{\cancel{\frac{۱۵}{۳}}},۸\right\}$ پس همه‌ی اعضای A و B یکی هستند و این دو مجموعه برابرند.

مثال (۲): با توجه به مجموعه‌های زیر درستی یا نادرستی گزاره‌ها را مشخص کنید.

$$A=\left\{۱,\frac{۳}{۵},-۲,۵\right\} \quad B=\{۶,۵\} \quad C=\{۵\} \quad D=\{-۲,۵\}$$

☑ **پاسخ**:

(نادرست) $A\subseteq D$ (درست) $B\not\subseteq C$ (نادرست) $D\subseteq C$

(درست) $B\subseteq B$ (درست) $\varnothing\subseteq A$ (درست) $D\not\subseteq B$

مثال (۳) : تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{۷,-۵,۰\}$ را بنویسید؟

☑ **پاسخ**: برای مشخص کردن زیرمجموعه‌های یک مجموعه ابتدا از تهی شروع می‌کنیم. سپس مجموعه‌های یک عضوی، دوعضوی و .... را می‌نویسیم تا به خود مجموعه برسیم.

$$\varnothing,\{۷\},\{-۵\},\{۰\},\{-۵,۷\},\{۷,۰\},\{۰,-۵\},\{۷,-۵,۰\}$$

آموزش و درسنامه

مجموعه‌های پُرکاربرد ریاضی

مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$

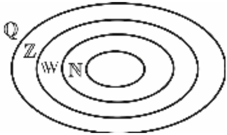
مجموعه‌ی اعداد حسابی $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه‌ی اعداد گویا $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$

در مجموعه‌ی اعداد گویا منظور از $\frac{a}{b}$ یعنی کسرهایی که هم صورت و هم مخرج، یک عدد صحیح باشند و مخرج هیچ وقت صفر نشود.

در نمودار مقابل رابطه‌ی بین مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ نمایش داده شده است.



که می‌توان نوشت: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

* هر عددی که بتوان آن را به صورت یک کسر نوشت گویا می‌باشد مثل:

$$۵=\frac{۵}{۱}\quad,\quad ۰=\frac{۰}{۱}\quad,\quad -۲\frac{۳}{۴}=-\frac{۱۱}{۴}$$

$$\sqrt{۴}=۲=\frac{۲}{۱}\quad,\quad ۲/۳=\frac{۲۳}{۱۰}$$

مثال و تمرین

مثال (۱) : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}$

☑ **پاسخ:** $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ (درست) $\qquad$ $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$ (درست)

$\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}$ (نادرست) $\qquad$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ (نادرست)

مثال (۲): آیا می‌توان گفت:

الف) هر عدد صحیح، یک عدد گویا است؟

ب) هر عدد گویا، یک عدد طبیعی است؟

ج) هر عدد حسابی، یک عدد صحیح است؟

☑ **پاسخ:** الف) بله چون هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به صورت یک کسر نوشت $a = \frac{a}{۱}$.

ب) خیر مثلاً $\frac{۲}{۵}$ عددی گویا است اما طبیعی نیست.

ج) بله چون اعداد حسابی از «صفر» که یک عدد صحیح است و $\{۱,۲,۳,...\}$ که اعداد صحیح مثبت هستند، تشکیل شده است.

آموزش و درسنامه

نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی

اگر بخواهیم مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳ را با نماد ریاضی نشان دهیم، می‌نویسیم:

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \ ,\ x < ۳\}$$

هر عدد — به طوری که — عضو اعداد طبیعی باشند — کوچک‌تر از ۳ باشند

در صورتی که بخواهیم اعداد صحیح بین ۳- و ۴ را با نماد ریاضی نشان دهیم می‌نویسیم:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \ ,\ -۳ < x < ۴\}$$

هر عدد — به طوری که — عضو اعداد صحیح باشند — بین ۳- و ۴ باشند

* اعداد طبیعی زوج به صورت مقابل نمایش داده می‌شوند:

$$E = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

* اعداد طبیعی فرد به صورت مقابل نوشته می‌شوند:

$$O = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مثال و تمرین

تمرین: مجموعه‌ی مقابل را با نماد ریاضی بنویسید. $A=\{۱۸,۱۹,۲۰,۲۱\}$

☑ **پاسخ:** چون مجموعه A اعداد طبیعی از ۱۸ تا ۲۱ است، می‌نویسیم:

$A=\{x \mid x\in \mathbb{N}, ۱۸\le x\le ۲۱\}$

مثال (۱): مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نمایش دهید.

$A=\{x \mid x\in \mathbb{N}, x\le ۵\}$ $\qquad$ $B=\{x \mid x\in \mathbb{Z}, -۱\le x<۱\}$

☑ **پاسخ:** مجموعه A شامل اعداد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۵ است.

$A=\{۵,۴,۳,۲,۱\}$

مجموعه B شامل اعداد صحیح از ۱- تا قبل از ۱ است که خود ۱- هم باید در مجموعه باشد. $B=\{-۱,۰\}$

مثال (۲): مجموعه مقابل را با اعضا نمایش دهید. $M=\{۴n+۳ \mid n\in \mathbb{N}\}$

☑ **پاسخ:** چون $n\in\mathbb{N}$ می‌باشد پس در $۴n+۳$ به جای n اعداد طبیعی قرار می‌دهیم تا اعضای مجموعه به دست آیند.

$n=۱\Rightarrow ۴\times۱+۳=۷$

$n=۲\Rightarrow ۴\times۲+۳=۱۱$

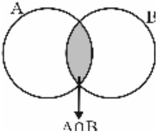
$n=۳\Rightarrow ۴\times۳+۳=۱۵$

$M=\{۷,۱۱,۱۵,...\}$

آموزش و درسنامه

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه‌ی A و B شامل همه عضوهایی می‌باشد که هم عضو A و هم عضو B باشند و به صورت $A\bigcap B$ می‌نویسیم و در نمودار وِن اشتراک به صورت مقابل است.



$$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A, x\in B\}$$

تمرین: اشتراک دو مجموعه $A=\{۴,۵\}$ و $B=\{۵,۶,۷\}$ را بنویسید.

☑ **پاسخ**: باید به دنبال عضوهایی باشیم که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B باشند که فقط ۵ این شرایط را دارد. پس: $A\bigcap B=\{۵\}$

* اشتراک هر مجموعه با خودش، برابر با خود مجموعه است. $A\bigcap A=A$
* اشتراک هر مجموعه با تهی، برابر با تهی می‌شود. $B\bigcup\varnothing=\varnothing$
* اشتراک دو مجموعه A و B، هم زیرمجموعه‌ی A است و هم زیرمجموعه‌ی B.

$A\bigcap B\subseteq A$ و $A\bigcap B\subseteq B$

مثال و تمرین

مثال (۱): اگر $E=\{a,b,e,c,m\}$ و $F=\{t,m,i,h,b\}$ باشند $E\cap F$ را بنویسید.

☑ **پاسخ:** $E\cap F=\{m,b\}$

مثال (۲): اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, ۲\le x<۷\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x<۵\}$ باشند، $A\cap B$ را بنویسید.

☑ **پاسخ:** ابتدا هر یک از دو مجموعه‌ی A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و بعد عضوهای مشترک را پیدا می‌کنیم.

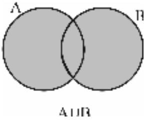
$B=\{۴,۳,۲,۱\}$ $\qquad$ $A=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$

$A\cap B=\{۴,۳,۲\}$

آموزش و درسنامه

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که در A یا B یا هر دو آن‌ها باشد که به صورت $A\bigcup B$ می‌نویسیم و در نمودار وِن اجتماع به صورت مقابل است.



$$A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

تمرین: اگر $A=\{-۲,۳,۵\}$ و $B=\{۳,۴\}$ باشند، $A\bigcup B$ را بنویسید.

☑ **پاسخ:** همه عضوهای A و B را می‌نویسیم. به یاد داشته باشیم که اگر عضوی تکرار باشد فقط یک‌بار نوشته می‌شود. $A\bigcup B=\{-۲,۳,۵,۴\}$

* اجتماع هر مجموعه با خودش، برابر خود مجموعه می‌شود. $F\bigcup F=F$

* اجتماع هر مجموعه با تهی، برابر با خود مجموعه است. $E\bigcup\varnothing=E$

* هر دو مجموعه، زیرمجموعه‌ی اجتماعشان می‌شوند.

$$A\subseteq A\bigcup B \qquad , \qquad B\subseteq A\bigcup B$$

* اشتراک هر دو مجموعه زیرمجموعه‌ی اجتماعشان می‌شود.

$$A\bigcap B\subseteq A\bigcup B$$

مثال و تمرین

مثال (۱): اگر $A=\{-۲,b,*,\square\}$ و $B=\left\{\frac{۴}{۵},*,\Delta\right\}$، $A\bigcup B$ را بنویسید.

☑ **پاسخ:** $A\bigcup B=\left\{-۲,b,*,\square,\frac{۴}{۵},\Delta\right\}$

مثال (۲): اگر $M=\{x\,|\,x\in Z,-۲<x\le ۳\}$ و $N=\{x\,|\,x\in N,x<۶\}$ باشند، $M\bigcup N$ را با اعضایشان بنویسید.

☑ **پاسخ:**

$M=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$

$N=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$M\bigcup N=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

مثال (۳): درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

☑ **پاسخ:**

الف) $A\subseteq A\bigcap B$ (نادرست) — ب) $A\bigcap B\not\subseteq B$ (نادرست)

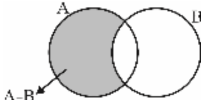
ج) $B\subseteq A\bigcup B$ (درست) — د) $A\bigcap B\subseteq A$ (درست)

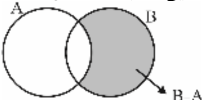
هـ) $A\bigcup B\not\subseteq B$ (درست) — و) $\varnothing\bigcap S=\varnothing$ (درست)

آموزش و درسنامه

تفاضل دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه: مجموعه‌ی $A-B$ یعنی همه‌ی اعضای A به جز عضوهایی که به B تعلق دارند و $B-A$ یعنی همه‌ی اعضای B به جز عضوهایی که به A تعلق دارند.





$$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\} \quad ، \quad B-A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}$$

تمرین: اگر $A=\{۳,۵,۱۰,۱۲\}$ و $B=\{۷,۱۰,۱۱\}$ باشند.

الف) $A-B$ و $B-A$ را بنویسید.

ب) آیا $A-B$ و $B-A$ با هم برابرند؟

☑ **پاسخ:** الف)

$$A-B=\{۳,۵,\cancel{۱۰},۱۲\}-\{\cancel{۷,۱۰,۱۱}\}=\{۳,۵,۱۲\}$$

$$B-A=\{۷,\cancel{۱۰},۱۱\}-\{\cancel{۳,۵,۱۰,۱۲}\}=\{۷,۱۱\}$$

ب) خیر چون اعضای هر دو مجموعه یکسان نیست.

* تفاضل هر مجموعه با خودش، برابر تهی می‌شود. $A-A=\varnothing$

* تفاضل هر مجموعه با تهی، برابر خود مجموعه است. $D-\varnothing=D$

* تفاضل تهی با هر مجموعه‌ای، تهی می‌شود. $\varnothing-E=\varnothing$

مثال و تمرین

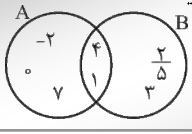
مثال: با توجه به شکل مقابل:

الف) اعضای مجموعه‌های A و B را بنویسید.

ب) $A\bigcap B$ را با اعضاء نمایش دهید.

ج) $A\bigcup B$ را بنویسید.

د) $A-B$ و $B-A$ را بنویسید.



☑ **پاسخ:**

الف)
$$\begin{cases} A=\{-۲,۰,۷,۱,۴\} \\ B=\left\{۱,۴,\dfrac{۲}{۵},۳\right\} \end{cases}$$

ب) $A\bigcap B=\{۱,۴\}$

ج) $A\bigcup B=\left\{-۲,۰,۷,۱,۴,\dfrac{۲}{۵},۳\right\}$

د)
$$\begin{cases} A-B=\{-۲,۰,۷,\cancel{۱},\cancel{۴}\}-\left\{\cancel{۱,۴,\dfrac{۲}{۵}},۳\right\}=\{-۲,۰,۷\} \\ B-A=\left\{\cancel{۱},\cancel{۴},\dfrac{۲}{۵},۳\right\}-\{\cancel{-۲,۰,۷,۱,۴}\}=\left\{\dfrac{۲}{۵},۳\right\} \end{cases}$$

آموزش و درسنامه

مجموعه‌ها و احتمال

* تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

اگر $A=\{۷,۵,۱۲\}$ باشد، $n(A)=۳$ است.

از سال گذشته به یاد دارید که:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$$

اگر همه‌ی حالت‌های ممکن را با S و همه‌ی حالت‌های مطلوب را با A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نشان دهیم آن‌گاه:

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$$

تمرین: در پرتاب یک تاس احتمال این‌که عدد رو شده زوجِ اول باشد چقدر است؟

☑ **پاسخ:**

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ $\qquad n(S)=۶$

$A=\{۲\}$ $\qquad n(A)=۱$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

مثال و تمرین

مثال (۱): در پرتاب هم‌زمان ۲ سکه احتمال این‌که فقط یک‌بار رو بیاید چقدر است؟

☑ **پاسخ:**

$S = \{$ (پ،پ)، (پ،ر)، (ر،پ)، (ر،ر) $\}$ $\qquad n(S) = ۴$

$A = \{$ (پ،ر)، (ر،پ) $\}$ $\qquad n(A) = ۲$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

مثال (۲): در پرتاب یک تاس و یک سکه احتمال این‌که تاس عدد اول و سکه پشت بیاید، چقدر است؟

☑ **پاسخ:**

$S = \{$ (۱،ر)، (۱،پ)، (۲،ر)، (۲،پ)، (۳،ر)، (۳،پ)، (۴،ر)، (۴،پ)، (۵،ر)، (۵،پ)، (۶،ر)، (۶،پ) $\}$

$n(S) = ۱۲$

$A = \{$ (۲،پ)، (۳،پ)، (۵،پ) $\}$ $\qquad n(A) = ۳$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

آموزش و درسنامه

بیش‌تر بدانیم

*** تعداد زیرمجموعه:**

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی ۲^n است.

تمرین: مجموعه‌ی $A=\{۲,۵,۷,۶,۳\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

☑ **پاسخ:** چون ۵ عضو داریم، پس:

$$۲^n=۲^۵=۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۳۲$$

*** زیرمجموعه‌ی محض:**

همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه به غیر از خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌نامند.

تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $۲^n-۱$ می‌باشد.

تمرین: مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

☑ **پاسخ:** ۴ عضو داریم، پس:

$$۲^n-۱=۲^۴-۱=۱۶-۱=۱۵$$

مثال و تمرین

مثال (۱): تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $۲^{۷}$ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

پاسخ: طبق رابطه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه (۲^{n})، چون توان ۲، هفت می‌باشد بنابراین تعداد عضوها هفت تا است.

مثال (۲): اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۶۴ باشد. تعداد عضوهای آن چند است؟

پاسخ: $۲^{n} = ۶۴ \xrightarrow{\text{۶۴ را تجزیه می کنیم}} ۲^{n} = ۲^{۶} \rightarrow n = ۶$

مثال (۳): تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۸ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۳ عضوی است؟

پاسخ: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۸ عضوی $\leftarrow ۲^{۸}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۳ عضوی $\leftarrow ۲^{۳}$

$$\frac{۲^{۸}}{۲^{۳}} = ۲^{۸-۳} = ۲^{۵} = ۳۲$$

مثال (۴): اگر تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه ۱۵ باشد. این مجموعه چند عضو دارد؟

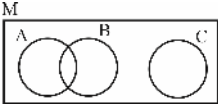
پاسخ: $۲^{n} - ۱ = ۱۵ \Rightarrow ۲^{n} = \overset{۱۶}{\cancel{۱۵+۱}} \rightarrow ۲^{n} = ۲^{۴} \rightarrow n = ۴$

آموزش و درسنامه

بیش‌تر بدانیم

*** مجموعه‌ی مرجع:**

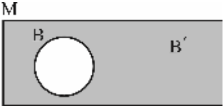
همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی یک مجموعه هستند. این مجموعه مجموعه‌ی مرجع یا مادر نامیده می‌شود که آن را با M نمایش می‌دهیم:



$$A \subset M, B \subset M, C \subset M$$

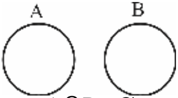
*** متمم یک مجموعه:**

اگر M مجموعه‌ی مرجع و B زیرمجموعه‌ی آن باشد، متمم B مجموعه‌ای است که اعضای آن در M هست ولی در B نیست که متمم B را با B' نمایش می‌دهیم.



*** دو مجموعه‌ی جدا از هم:**

دو مجموعه که اشتراک آن‌ها تهی باشد را دو مجموعه‌ی جدا از هم می‌نامند.



$$A \cap B = \varnothing$$

به عنوان مثال: مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد فرد دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

*** مجموعه‌های هم‌ارز:**

هرگاه به هر عضو A فقط یک عضو B و به هر عضو B فقط یک عضو A نسبت داده شود، آن دو مجموعه را مجموعه‌های هم‌ارز می‌گوییم و به صورت $A \cong B$ نشان می‌دهیم.

*** بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل**

هرگاه دو عضو از یک مجموعه را باهم +، −، × یا ÷ کنیم و حاصل آن در مجموعه باشد، آن‌گاه مجموعه را نسبت به عمل انجام شده، بسته می‌گوییم.

مثال و تمرین

مثال (۱): اگر $M = \{۳,۴,۶,۷\}$ و $B = \{۶,۷\}$ باشد، متمم B را بنویسید.

☑ **پاسخ:** اعضایی که در M هست ولی در B نیست را متمم B می‌نامیم.

$B' = \{۳,۴\}$

مثال (۲): الف) متمم مجموعه‌ی مرجع برابر است با ....

ب) متمم تهی برابر است با ....

ج) متممِ متمم هر مجموعه برابر است با ....

☑ **پاسخ:** الف) تهی ب) مجموعه‌ی مرجع ج) خود مجموعه

مثال (۳): آیا دو مجموعه‌ی $A=\{x,y\}$ و $B=\{۳,۴\}$ دو مجموعه‌ی هم‌ارز هستند؟

☑ **پاسخ:** بله، چون تعداد عضوهای آن‌ها برابر است.

مثال (۴): آیا مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع و تفریق بسته است؟

☑ **پاسخ:** نسبت به عمل جمع بسته است؛ زیرا حاصل‌جمع دو عدد طبیعی عددی طبیعی است.

اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

$۱+۲=۳ \quad , \quad ۲+۴=۶ \quad , \quad ۳+۴=۷$

ولی نسبت به عمل تفریق بسته نیست، زیرا: $۱-۱=۰ \quad , \quad ۲-۳=-۱$

مثال (۵): آیا مجموعه‌ی اعداد حقیقی نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟

☑ **پاسخ:**

نسبت به عمل تقسیم بسته نیست؛ زیرا حاصل تقسیم مثلاً عدد یک بر صفر عددی تعریف نشده است.

$\frac{۱}{۰}=$ تعریف نشده