



اسمارت 4 SMART 9

آموزش پیشرفته ریاضی تیزهوشان و نمونه دولتی نهم

آموزش کامل، جامع و نکته به نکته

سؤالات تستی و تشریحی هدف دار و طبقه بندی شده

به همراه نرم افزار آزمون ساز

رایگان



نسخه اندروید + ویندوز

لوح برتر انتخاب برتر ✓



مجموعه کتاب‌های اسمارت SMART

کتاب‌های آموزش تیزهوشان و نمونه‌دولتی که به «اسمارت» معروف شده‌اند، دارای ویژگی‌های زیر هستند:

- ۱- آموزش کامل و جامع تمام مباحث کتاب درسی
- ۲- آموزش نکات کلیدی و کاربردی تیزهوشان و نمونه‌دولتی
- ۳- انواع سوالات هدف‌دار و طبقه‌بندی‌شده تیزهوشان و نمونه‌دولتی به تفکیک هر درس
- ۴- پاسخ‌های کاملاً تشریحی و آموزشی
- ۵- همراه با نرم‌افزار آزمون‌ساز فوق‌پیشرفته رایگان با قابلیت برگزاری انواع آزمون‌ها



تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین لبافی نژاد و جمهوری، پلاک ۱۲۱۳

۶۶۱۷۵۰۵۳ - ۶۶۹۷۱۹۷۰ - ۶۶۹۷۱۸۰۴ - ۶۶۹۷۲۴۷۸

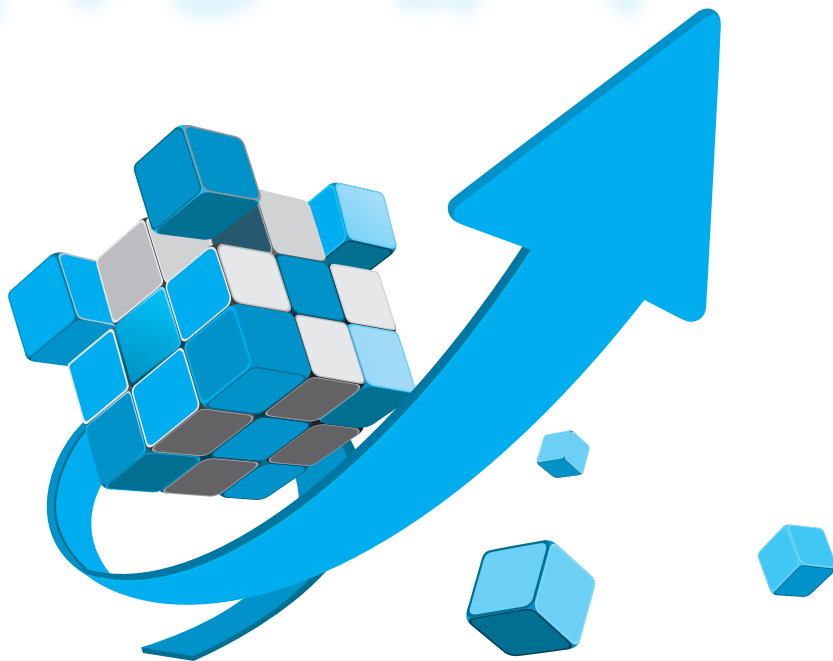
Lohebartarpub Lohebartar www.Lohebartar.ir

سامانه پیامکی: ۰۵۳۶۴۰۰۰۰۳



QRcode

اسمارت ریاضی نم



آموزش کامل، پیشرفته و نکته به نکته
ویژه آزمون های تیزهوشان و نمونه دولتی

همراه با سامانه آزمون ساز رایگان

سیدمجید میری، امین تورانی



مقدمه ناشر

کتاب اسمارت نهم با هدف آموزش پیشرفته ریاضی تیزهوشان و نمونه دولتی طراحی و تولید شده است. این کتاب دارای سه بخش اصلی زیر است:

① راه‌های تقویت یادگیری ریاضی و تکنیک‌های تست‌زنی

② آموزش و تست فصل‌های هشت‌گانه کتاب درسی و ارائه فصل نهم با نام سؤالات ریاضی و خلاقیت

③ آزمون‌های جامع تکمیلی

هر فصل به چند مبحث تقسیم شده است. در هر مبحث، نکات مهم و کاربردی با استفاده از مثال‌های آموزشی هدف‌دار و هوشمندانه آموزش داده شده است. برای هر نکته آموزشی، انواع مثال‌ها با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و آموزشی ارائه گردیده است. شیوه بیان مطالب به گونه‌ای است که دانش‌آموز بتواند به راحتی با آن ارتباط برقرار کند.

در پایان هر مبحث تعداد قابل توجهی تمرین تشریحی با پاسخ‌نامه آورده شده است. بعد از ارائه تمام مباحث یک فصل، تست‌های جامع فصل که همه مباحث آن فصل را پوشش می‌دهد به همراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی قرار داده شده است. فصل نهم کتاب به سؤالات ریاضی و خلاقیت می‌پردازد تا تمام هدف‌های آموزشی به نحوه احسن اجرا شده باشند.

در بخش سوم، آخرین سؤالات آزمون تیزهوشان و نمونه دولتی با پاسخ کاملاً تشریحی ارائه شده است. نرم‌افزار آزمون‌ساز فوق پیشرفته رایگان با قابلیت برگزاری انواع آزمون‌های فصل‌به‌فصل، مبحثی و جامع از دیگر ویژگی‌های این بسته آموزشی بی‌نظیر است.

لازم به ذکر است که کتاب‌های ایکيوسان، هوش برتر و اسمارت پایه نهم؛ سه ضلع، مثلث طلایی محصولات آموزشی لوح برتر برای ورود به مدارس تیزهوشان و نمونه دولتی را تشکیل می‌دهند.

در پایان بر این نکته تاکید می‌کنیم که تمامی این نوآوری و خلاقیت‌ها به لحاظ داشتن همکاران زیرک و باهوشی چون شماست، که با ارائه نظرات و راهنمایی‌های خود، موجبات رشد محصولات آموزشی لوح برتر را فراهم نموده‌اید. امیدواریم که همچنان ما را از نظرات کارشناسی و خلاقانه خود محروم نسازید.

با تشکر و سپاس
صادق گرجی

تلفن‌ها: ۶۶۱۷۵۰۵۳ ۶۶۹۷۱۸۰۴ ۶۶۱۷۵۰۵۳ ۶۶۹۷۲۴۷۸-۰۲۱

کانال تلگرام: @Lohebartarpub

پست الکترونیکی: Lohebartar@gmail.com

مراجعه به بخش «ارتباط با ما» سایت انتشارات Lohebartar.ir

عناوین و فهرست مطالب

بخش اول: نکات مشاوره‌ای

راه‌های تقویت یادگیری ریاضی و تکنیک‌های تست‌زنی ۵

بخش دوم: آموزش و تست‌های فصل اول تا نهم

فصل اول: مجموعه‌ها ۱۵

فصل دوم: عددهای حقیقی ۶۱

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه ۸۷

فصل چهارم: توان و ریشه‌ها ۱۴۵

فصل پنجم: عبارتهای جبری ۱۸۷

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی ۲۲۷

فصل هفتم: عبارتهای گویا ۲۷۹

فصل هشتم: حجم و مساحت ۳۰۱

فصل نهم: سؤالات طبقه‌بندی شده ریاضی و خلاقیت ۳۲۹

بخش سوم: آزمون‌های جامع سال‌های گذشته

آزمون‌های تیزهوشان و نمونه دولتی



چگونه یادگیری ریاضی را در خود تقویت کنیم؟

چرا بسیاری از دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی مشکل دارند و از آن فرار می‌کنند؟
برعکس، چرا ریاضی برای بعضی‌ها درس آسانی است و از مطالعه آن لذت می‌برند؟

پاسخ به این سؤال‌ها به چند عامل بستگی دارد. اگر می‌خواهید در یادگیری ریاضی پیشرفت کنید، مطالب زیر را با دقت بخوانید؛ سعی کنید مفهوم آن‌ها را درک و راه‌حل‌های ارائه‌شده را اجرا کنید.

① ساختار ذهنی انسان‌ها با یکدیگر متفاوت است. برخی دانش‌آموزان دروس حفظی را خوب می‌آموزند و عده دیگری دروس «تمرین‌محور» را بهتر یاد می‌گیرند. اما بررسی‌ها نشان می‌دهد که هر دو گروه می‌توانند با تمرین و یادگیری روش‌های درست مطالعه، پیشرفت کنند.

② علاقه به درس ریاضی و روش مطالعه درست و مؤثر، تأثیر زیادی در یادگیری عمیق ریاضی دارد. در بسیاری موارد، دانش‌آموزان با اصلاح روش مطالعه خود به پیشرفت‌های بسیار خوبی در یادگیری ریاضی، دست یافته‌اند.



در این قسمت قصد داریم به تشریح ساختار مغز انسان بپردازیم و روش درست مطالعه و یادگیری ریاضی را توضیح دهیم. پس ابتدا به ساختار مغز می‌پردازیم. همان‌طور که در تصویر می‌بینید، مغز ما شامل دو نیمکره است که از نظر ظاهری بسیار به هم شبیه هستند، اما از نظر کارکرد دارای وظایف اختصاصی و متفاوتی هستند. این دو نیمکره با قسمتی به نام «جسم پینه‌ای» به یکدیگر متصل‌اند. به‌طور کلی در هر انسان، یکی از نیمکره‌های مغزی او بر دیگری برتری دارد و دقیقاً به همین دلیل، توانایی‌های ذهنی تغییر می‌کنند. اگر نیمکره چپ فرد غالب باشد، به او «چپ‌برتر» یا «چپ‌مغز» و اگر نیمکره راستش غالب باشد، به او «راست‌برتر» یا «راست‌مغز» می‌گویند.

ویژگی افراد چپ‌برتر یا چپ‌مغز

- ① رفتارشان سازمان‌یافته‌تر و منظم‌تر است و اطلاعات دریافتی را بهتر پردازش می‌کنند.
- ② معمولاً سطح هوشیاری در این افراد، بیشتر است.
- ③ قوانین و برنامه‌ها را به‌خوبی دنبال می‌کنند.
- ④ در یادگیری ریاضی و علوم تجربی قوی‌تر از راست‌مغزها هستند و سریع‌تر به پرسش‌های ریاضی و علوم تجربی پاسخ می‌دهند.
- ⑤ نظم و طبقه‌بندی را می‌پسندند.
- ⑥ به روش منطقی با مسائل برخورد می‌کنند و تحلیلگر خوبی هستند.



- ۷ به جزئیات بیشتر دقت می کنند.
- ۸ به نظم و انضباط توجه ویژه‌ای دارند.
- ۹ این بخش از مغز ریاضیدان‌ها فعال‌تر و بر نیمکره راست، غالب است.

ویژگی افراد راست‌پرت یا راست‌مغز

- ۱ خیال‌پرداز هستند.
- ۲ این افراد در علوم اجتماعی و هنر موفق‌ترند.
- ۳ بسیار شهودی هستند و پاسخ بسیاری از مسائل را از راه الهام و بدون قاعده به دست می‌آورند.
- ۴ قدرت خلاقیت و کشف دارند.
- ۵ ورزش و حرکات موزون را بهتر انجام می‌دهند.
- ۶ استعداد موسیقی در راست‌برتها بیشتر است.
- ۷ با هنرهای نقاشی و طراحی سروکار دارند.
- ۸ کلی‌نگر هستند. طراحان، نویسندگان، نقاشان و هنرمندان بزرگ از این قسمت مغزشان بیشتر استفاده می‌کنند.

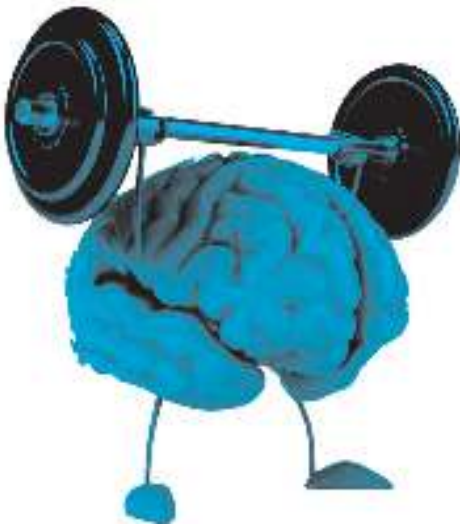
راههای پرورش نیمکره چپ مغز

آیا می‌توانیم نیمکره چپ مغزمان را تقویت کنیم؟ در صورتی که تمرین‌های زیر را انجام دهید، نیمکره چپ مغز شما تقویت و یادگیری ریاضی شما تسریع می‌شود.

- ۱ جدول حل کنید.
- ۲ برای کارهای روزانه‌تان برنامه‌ریزی داشته باشید.
- ۳ از حس شنوایی‌تان در طبیعت و دریافت صداهای آن، بیشتر استفاده کنید.
- ۴ سعی کنید بیشتر پازل و شطرنج بازی کنید.
- ۴ سخنوری و کنفرانس دادن را تمرین کنید.

راههای پرورش نیمکره راست مغز

- ۱ به خودتان برای فکرهای تخیلی و پرداختن به خیال‌بافی، مجال بدهید.
- ۲ رمان بخوانید و داستان را به شکل تصویر در ذهن خود مرور کنید.
- ۳ نقاشی و طراحی را بیاموزید.
- ۴ گاهی بچگانه فکر کنید و به کودک درون خود اهمیت بدهید.



چگونه علاقه خود را به ریاض بیستر کنیم؟

در این مورد یک اصل ثابت و مهم وجود دارد: «به هر درسی که نمره‌های خوبی در آن بگیریم، علاقه پیدا می‌کنیم و برعکس، از دروسی که نمرات خوبی در آن‌ها نگرفته باشیم، بیزار می‌شویم». اینکه بعضی از دانش‌آموزان می‌گویند: «من از این درس بدم می‌آید، یا به فلان درس علاقه دارم»، فقط به میزان تجربه‌های موفق و ناموفق در طی سال‌های گذشته و نمراتی که در آن درس‌ها گرفته‌اند، بستگی دارد.

تجربه‌های ناموفق در یک درس به ناتوانی یادگیری در آن درس تبدیل می‌شود

تصور کنید از همان کلاس اول ابتدایی در درس ریاضی مشکل داشته‌اید و نمرات خوبی در این درس به دست نمی‌آورده‌اید. حتی بعضی وقت‌ها، معلمان از والدینتان می‌خواهند که برای حل این مشکل به مدرسه بیایند. این اتفاقات به مرور زمان باعث ترس از ریاضی و بی‌علاقگی شما به این درس می‌شود. برعکس، اگر در این درس نمرات خوبی گرفته باشید و معلم‌های سال‌های قبل، از توانایی‌های شما در یادگیری ریاضی، هم در کلاس درس و هم نزد والدینتان، تعریف کرده باشند، سر ذوق خواهید آمد و شیفته ریاضی خواهید شد. نکته مهم این است که وقتی به درسی علاقه داشته باشیم، ناخودآگاه بیشتر به سراغ آن می‌رویم و وقت بیشتری به آن اختصاص می‌دهیم. همین موضوع باعث می‌شود که در آن پیشرفت کنیم و از مطالعه‌اش خسته نشویم.

چگونه علاقه خود را به ریاضی بیستر کنیم؟

- ۱) نترسید. به جای فرار از این درس، وقت بیشتری به آن اختصاص دهید.
- ۲) ابتدا مطالب ساده‌تر را انتخاب کنید. با یادگیری مطالب ساده‌تر، اعتماد به نفس یادگیری در شما تقویت خواهد شد.
- ۳) در منزل یک مبحث یا تمرین ساده که به جلسه آینده مربوط می‌شود را انتخاب کنید و برای یادگیری‌اش بسیار تلاش کنید. از دوستان و همکلاسی‌های خود برای یادگیری عمیق آن کمک بگیرید. وقتی به کلاس درس رفتید، از معلمان خواهش کنید که به شما اجازه دهد آن مطلب یا تمرین را در کلاس توضیح بدهید یا حل کنید؛ با این کار اعتماد به نفس شما در درس افزایش پیدا خواهد کرد.
- ۴) روش درست یادگیری را بیاموزید تا زودتر و عمیق‌تر پیشرفت کنید.

روش مطالعه و یادگیری ریاضی

۱) درک عمیق مفاهیم ریاضی با مطالعه دقیق و کاملاً مفهومی کتاب درسی و جزوه:

یک دانش‌آموز باهوش و ساعی، کتاب درسی، جزوه و کتاب کمک آموزشی خود را با دقت مطالعه می‌کند، مطالب آن‌ها را با یکدیگر مطابقت می‌دهد و سعی می‌کند مفاهیم درسی را به‌طور عمیق و دقیق درک کند. به خاطر داشته باشید که محور اصلی طراحی سؤالات امتحانی، کتاب درسی است. در این مرحله هدف اصلی، درک و فهم کامل و عمیق مفاهیم درس ریاضی است. مطالعه این کتاب در کنار کتاب درسی، کمک زیادی به شما خواهد کرد.

۲) حل دقیق تمرین‌ها و مطابقت دادن پاسخ‌های خود با پاسخ درست

در این مرحله باید تمرین‌های داده‌شده را با دقت حل و پاسخ خود را با پاسخ درست مقایسه کنید. این کار باید به‌طور کامل انجام و صفر تا صد هر تمرین به‌طور عملی حل شود. مرور تمرین‌ها با چشم به‌جای حل آن‌ها، کاری بیهوده و غیرمفید است. باید تلاش کنید هنگام حل تمرین‌های مختلف، سایر اعضای بدن خود را نیز درگیر کنید. نوشتن پاسخ‌ها در یک دفتر چرک‌نویس، چشم‌ها، دست و مغز شما را درگیر و یادگیری شما را عمیق‌تر می‌کند.

یک تصور غلط و خطرناک: بسیاری از دانش‌آموزان بعد از مطالعه جزوه و حل تمرین‌های آن، فکر می‌کنند برای امتحان آماده شده‌اند؛ درحالی‌که انجام این کار فقط ۱۰ درصد از کل یادگیری است.



۳ حل تمرین‌های بیشتر و مطابقت دادن پاسخ‌های خود با پاسخ درست

یادگیری ریاضی مثل رانندگی است. یک راننده تازه‌کار کلاچ، ترمز، دنده و فرمان را به‌خوبی می‌شناسد، اما مهارت او در رانندگی مانند راننده‌ای نیست که سال‌ها تجربه رانندگی دارد. او باید مدت زیادی در جاده‌های مختلف رانندگی کند تا به راننده‌ای ماهر تبدیل شود. خواندن مطالب آموزشی کتاب درسی یا اسمارت، برای یادگیری عمیق ریاضی کافی نیست، بلکه باید انواع تمرین‌های ارائه‌شده نیز با دقت حل شوند. در کتاب اسمارت، ابتدا نکات مهم درسی آموزش داده شده، سپس تعدادی تمرین برای یادگیری بیشتر ارائه شده است. در انتهای هر فصل، انواع تست‌ها و تمرین‌های شناسنامه‌دار برای تسلط بیشتر آورده شده است. نباید انتظار داشته باشید که بدون حل این تمرین‌ها ریاضی‌تان تقویت شود. این تمرین‌ها دقیقاً مثل مانورهای جنگی برای سربازان عمل می‌کنند و شما را برای رویارویی با نبرد و امتحان واقعی آماده می‌کنند.

۴ پیدا کردن اشکالات خود و حل مجدد آن‌ها

موقع حل تمرین‌ها و تست‌های مختلف، باید اشکالاتتان را یادداشت کنید. برای برطرف کردن این اشکالات، ابتدا پاسخ‌های تشریحی را با دقت بررسی کنید و ببینید چه اشتباهی داشته‌اید. در صورت نیاز قسمت آموزش را یک بار دیگر بخوانید. این کار به شما کمک می‌کند به اشتباهات پی ببرید و نقاط ضعف‌تان را برطرف کنید.

۵ برطرف کردن اشکالات درسی از طریق هم‌کلاسی‌ها یا در صورت امکان، معلم

نباید با نگرانی از کامل یاد نگرفتن یک مبحث درسی، سر جلسه امتحان حاضر شوید، چه بسا بعضی از سؤالات از همان مطالبی طراحی شوند که شما مشکل دارید. اگر قبلاً این مشکل را حل نکرده‌اید، نباید انتظار داشته باشید در جلسه آزمون با آن وقت محدود و بدون دسترسی به کتاب، بتوانید به چنین سؤالاتی پاسخ دهید. ریشه اصلی اضطراب و دلشوره قبل از آزمون و حتی هنگام آزمون، همین موضوع است. سعی کنید اشکالاتتان را از معلم یا هم‌کلاسی‌ها بپرسید.

۶ حل تمرین‌های با تنوع بیشتر، برای افزایش مهارت و تسلط کامل

به‌نظر ما برای تسلط بر هر مبحث باید ۲۰ الی ۳۰ تمرین ساده، متوسط و دشوار حل شود. اگر فقط تمرین‌های ساده و معمولی را حل کرده باشید، غیرمنطقی است که انتظار پاسخگویی به سؤالات دشوار و حتی متوسط را در جلسه آزمون داشته باشید. حل تمرین‌های متنوع و دشوار، مثل انجام بازی‌های تدارکاتی با تیم‌های خوب برای یک تیم فوتبال است. هرچه با تیم‌های بهتر و قوی‌تر بازی کنیم، تیم ما قوی‌تر خواهد شد.

در کتاب اسمارت نهم، سطح دشواری تست‌های پایان هر فصل در پاسخ‌نامه، با ستاره مشخص شده است. تست‌های ساده با یک ستاره، تست‌های متوسط با دو ستاره و تست‌های دشوار با سه ستاره علامت‌گذاری شده‌اند. ابتدا سؤالات ساده، سپس سؤالات متوسط و در آخر سؤالات دشوار را حل کنید تا تسلطتان افزایش پیدا کند.

برای موفقیت در یک آزمون تستی، علاوه بر معلومات و آمادگی علمی، توانایی‌های دیگری نیز لازم است؛ از جمله:

توانایی کنترل افکار ذهنی و هیجانات فردی در جلسه آزمون

بررسی‌ها نشان می‌دهند که گاهی دانش‌آموزان قوی و توانمند در آزمون پذیرفته نمی‌شوند. وقتی علت این موضوع را بررسی می‌کنیم، متوجه می‌شویم که این دانش‌آموزان در جلسه آزمون دچار اضطراب و دلشوره می‌شوند و تمرکز خود را برای پاسخگویی به سؤالات از دست می‌دهند. برای موفقیت در آزمون، تکیه صرف به معلومات کافی نیست، بلکه توانایی استفاده درست از معلومات و آموخته‌های ذهنی هم از اهمیت بسیاری برخوردار است. استفاده از راهنمایی‌های مشاور و توانمند و باتجربه، پرهیز از بیان موفقیت دانش‌آموز در بین اقوام و بستگان، و ارائه آموزش‌های لازم به دانش‌آموز برای تسلط بر هیجانات و افکار ذهنی در جلسه آزمون، بسیار مهم و سرنوشت‌ساز است. وقتی دچار اضطراب می‌شویم، تمرکز خود را از دست می‌دهیم و نمی‌توانیم از دانش خود، به‌خوبی استفاده کنیم. ریشه این اضطراب و نگرانی به موارد زیر مربوط می‌شود:

۱ حس رقابت ناسالم با دیگران؛

- ۲ فشار بیش از حد والدین برای قبول شدن در آزمون؛
- ۳ عدم آمادگی علمی دانش‌آموز و مقایسه خود با دیگران؛
- ۴ بیان بیش از حد موفقیت درسی فرزندان در بین فامیل از سوی والدین، در نتیجه، افزایش توقع دیگران و فشار روانی به دانش‌آموز؛
- ۵ بی‌توجهی به توانایی‌های ذهنی و درسی دانش‌آموز و تعیین اهدافی مغایر با توانایی ذاتی او؛
- ۶ تاب‌آوری اندک برخی از دانش‌آموزان و اضطراب ذاتی آن‌ها؛
- ۷ فشار درسی بیش از حد به دانش‌آموز.

برخی از راهکارهای مقابله با اضطراب درسی به شرح زیر هستند:

- ۱ افزایش توانایی کنترل ذهنی؛
- ۲ کاهش عوامل اضطراب‌زای فوق؛
- ۳ واقع‌بینی و تعیین اهداف تحصیلی متناسب با توانایی دانش‌آموز؛
- ۴ استفاده از یک مشاور توانمند و آشنا به مسائل روانی و تحصیلی؛
- ۵ رقابت درسی دانش‌آموز با خودش، نه دیگران؛
- ۶ افزایش آگاهی والدین؛
- ۷ توجه به فعالیت‌های تفریحی و ورزشی در کنار مسائل درسی.

مهارت‌های تست‌زنی و بررسی سؤالات سال‌های گذشته

آشنایی دانش‌آموزان با انواع سؤالات تستی و بررسی و تحلیل آن‌ها اهمیت بسیاری دارد. این کتاب و نرم‌افزار فوق‌پیشرفته آزمون‌ساز همراه آن، کامل‌ترین بسته آموزشی در زمینه ریاضی است و احتمال موفقیت در آزمون ورودی مدارس تیزهوشان و نمونه‌دولتی را افزایش می‌دهد. نرم‌افزار آزمون‌ساز فوق‌پیشرفته لوح برتر کمک زیادی به افزایش مهارت‌های تست‌زنی می‌کند.

■ در این قسمت قصد داریم شما را با تکنیک‌ها و مهارت‌های زیر آشنا کنیم:

الف) آشنایی با نحوه درصدگیری

ب) مهندسی معکوس

ج) تکنیک بعلاوه منها (+ -) یا مدیریت زمان

■ آموزش تکنیک‌های تست‌زنی و نحوه پاسخ‌گویی به سؤالات چهارگزینه‌ای

یکی از نیازهای اصلی هر دانش‌آموز، آشنایی با تکنیک‌ها و فنون تست‌زنی است. در این قسمت تلاش می‌کنیم نکات مهم و کاربردی را در این زمینه توضیح دهیم. از دبیران گرامی و ارجمند درخواست می‌کنیم با مطالعه این بخش، مباحث ارائه‌شده را به دانش‌آموزان خود آموزش دهند.

■ آموزش نحوه درصدگیری

همان‌طور که می‌دانید، در آزمون‌های تستی هر سه پاسخ غلط، یکی از پاسخ‌های درست را از بین می‌برد. برای اینکه بتوانیم درصد هر درس را با توجه به پاسخ‌های نادرست محاسبه کنیم، باید از فرمول زیر استفاده کنیم. به خاطر داشته باشید که به درصد، «نمره خام» هم گفته می‌شود.

$$۱۰۰ \times \frac{\text{تعداد پاسخ‌های نادرست} - (۳ \times \text{تعداد پاسخ‌های درست})}{۳ \times \text{تعداد کل سؤالات درس مورد نظر}} = \text{درصد یا نمره خام}$$





شاید بپرسید «پس تکلیف سؤالات نزده یا بدون پاسخ، در این فرمول چه می‌شود؟» باید توجه کنید که سؤالات بدون پاسخ یا نزده، هیچ تأثیری در نمره ندارند و این پاسخ‌های درست و نادرست هستند که نمره شما را تعیین می‌کنند. حالا به یک مثال توجه کنید:

مثال: فرض کنید در آزمونی از ۳۰ سؤال ریاضی، به ۱۵ سؤال پاسخ درست و به ۸ سؤال پاسخ نادرست داده‌اید؛ به ۷ سؤال هم پاسخ نداده‌اید. برای محاسبه «درصد یا نمره خام» باید به شیوه زیر عمل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} ۳۰ = \text{کل سؤالات درس} \\ ۱۵ = \text{پاسخ‌های درست} \\ ۸ = \text{پاسخ‌های نادرست} \\ ۷ = \text{سؤالات بدون پاسخ} \end{array} \right\} \text{درصد} = \frac{\text{تعداد پاسخ‌های نادرست} - (۳ \times \text{تعداد پاسخ‌های درست})}{۳ \times \text{تعداد کل سؤالات درس مورد نظر}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{(۱۵ \times ۳) - ۸}{۳ \times ۳۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۴۵ - ۸}{۹۰} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳۷}{۹۰} \times \frac{۱۰۰}{۱} \Rightarrow \frac{۳۷۰۰}{۹۰} = ۴۱/۱۱$$

حالا برای اینکه با تأثیر پاسخ‌های نادرست آشنا شوید و بدانید که چرا دبیران شما بارها و بارها تأکید می‌کنند نباید به سؤالاتی که پاسخ آن‌ها را نمی‌دانید، جواب دهید، به ادامه مطلب توجه کنید.

فرض کنید پس از خواندن این مطلب و آشنایی با تکنیک‌های تست‌زنی، از جواب دادن به سؤالاتی که پاسخ آن‌ها را نمی‌دانید، پرهیز کرده‌اید و فقط به همان ۱۵ سؤالی که جواب آن‌ها را بلد بوده‌اید، پاسخ داده‌اید. در این صورت نحوه محاسبه نمره خام یا درصد به شکل زیر خواهد بود:

$$\text{درصد} = \frac{۱۵ \times ۳ - ۰}{۳۰ \times ۳} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۴۵}{۹۰} \times \frac{۱۰۰}{۱} \Rightarrow \frac{۴۵۰۰}{۹۰} = ۵۰$$

اختلاف روش اول و دوم $۵۰ - ۴۱/۱۱ = ۸/۸۹\%$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در مرحله دوم بدون آنکه حتی یک پاسخ درست اضافه کرده باشید، توانستید درصد خود را $۸/۸۹\%$ افزایش دهید. در نتیجه نباید به سؤالاتی که جواب آن‌ها را نمی‌دانید، پاسخ دهید.

مهندسی معکوس در تست‌زنی



وقتی مهندسان و صنعتگران کشوری، محصول و کالای ساخته‌شده کشور دیگری را باز و قطعه‌قطعه و از روی آن کپی‌برداری می‌کنند و به دانش و فناوری ساخت آن محصول دست می‌یابند، مهندسی معکوس را اجرا کرده‌اند. روش مهندسی معکوس از صنعت وارد حوزه آموزش شده است. در پاسخگویی به سؤالات تستی، وقتی با بررسی گزینه‌ها بتوان به پاسخ درست دست پیدا کرد، از این واژه استفاده می‌شود. یعنی به جای اینکه سؤال موردنظر را حل کنید و به پاسخ درست برسید، برعکس عمل می‌کنید و از روی گزینه‌ها به پاسخ درست می‌رسید. برای شناخت بهتر این تکنیک، به مثال‌هایی که در ادامه می‌آیند، توجه کنید.

مثال: دمای داخل اتاق ۱۲ درجه بالای صفر و هوای بیرون اتاق ۱۴ درجه سردتر است. به ترتیب دمای بیرون اتاق و میانگین دمای بیرون و داخل اتاق، چند درجه است؟

(نمونه‌ای شهر تهران)

(۴) و ۲ و ۵

(۳) و ۲ و ۵

(۲) و ۲ و ۵

(۱) و ۲ و ۵

روش اول حل سؤال: در اینجا با همان روش معمولی و مرسوم سؤال را حل می‌کنید تا به جواب برسید.

روش دوم یا همان مهندسی معکوس: در صورتی که پاسخگویی به سؤال، از روش معمولی (روش اول) دشوار و زمان‌بر به نظر برسد، می‌توانید از این روش استفاده کنید. در این روش باید اول به بررسی تمام گزینه‌ها بپردازید و سعی داشته باشید ابتدا گزینه‌های نادرست را حذف کنید تا انتخاب «پاسخ درست» آسان‌تر شود. در مرحله بعدی پاسخ درست را از بین گزینه‌های باقی‌مانده بیابید.

در مورد سؤال فوق، چون دمای بیرون اتاق ۱۴ درجه بوده و از دمای درون اتاق که ۱۲ درجه است، سردتر است، پس دمای بیرون اتاق یا به عبارت بهتر، عدد اول هر گزینه باید حتماً «منفی» باشد. به این ترتیب گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند. حالا باید پاسخ درست را از بین گزینه‌های ۲ و ۳ جست‌وجو کنیم.

چون دمای بیرون ۱۴ درجه بوده و سردتر از دمای داخل اتاق (۱۲) است، پس دمای بیرون اتاق ۲- است. حالا با یک محاسبه ساده، میانگین این دو به دست می‌آید. $5 = 10 \div 2 \Rightarrow 10 = (-2) + (12)$ در نتیجه گزینه «۳» پاسخ درست است.

دقت کنید که طراح سؤال به شکل ماهرانه‌ای گزینه‌های ۲ و ۳ را شبیه به هم طراحی کرده است تا دانش‌آموزان عجول و بی‌دقت به اشتباه بیفتند. به گزینه نادرستی که بسیار به گزینه درست شبیه باشد، «گزینه دام» می‌گوییم. گزینه دام در این سؤال گزینه «۲» است. البته طراح سؤال برای جلوگیری از پاسخگویی شانسی، گزینه‌های ۱ و ۴ را نیز شبیه به هم طراحی کرده است. به مثالی دیگر توجه کنید.

(نمونه‌دهی شهر تهران)

مثال: مقدار تقریبی کسر $\frac{2}{3}$ به روش گرد کردن با تقریب کمتر از ۰/۰۱ چقدر است؟

۰/۶۷ (۴)

۰/۶۶۶ (۳)

۰/۶۶ (۲)

۰/۶ (۱)

چون سؤال گفته است با تقریب (۰/۰۱)، با بررسی هر چهار گزینه مشخص می‌شود که گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست‌اند و پاسخ درست باید بین گزینه‌های ۲ و ۴ باشد. حال، کدام گزینه با تقریب کمتر از ۰/۰۱ گرد شده است؟ (۰/۶۶ یا ۰/۶۷) با یک محاسبه ساده می‌توان دریافت که گزینه ۴، یعنی ۰/۶۷، پاسخ درست است.



■ آموزش تکنیک بعلاوه منها (+ -) یا مدیریت زمان

تکنیک بعلاوه منها (+-) به شما یاد می‌دهد که چگونه از فرصت آزمون، خوب و مفید استفاده کنید. این تکنیک برای آن است که دانش‌آموز بتواند زمان محدود خود را در جلسه آزمون مدیریت کند تا با کمبود وقت مواجه نشود. بسیاری از دانش‌آموزان به دلیل اینکه وقت زیادی روی سؤال‌های درس اول می‌گذارند، وقتی به سؤال‌های درس‌های آخر می‌رسند، متوجه می‌شوند که زمانشان به پایان رسیده است و مراقبان در حال جمع‌آوری پاسخ‌ها هستند؛ درحالی‌که هنوز به تعداد زیادی از سؤالات، پاسخ نداده‌اند. یعنی وقت خود را بیهوده صرف سؤالاتی کرده‌اند که شاید پاسخشان هم درست نباشد. در نتیجه فرصت پاسخگویی به سؤالاتی که پاسخشان را بلد بوده‌اند، را از دست داده‌اند. تکنیک (+ -) می‌تواند جلوی این مشکل را بگیرد و به دانش‌آموز کمک کند که «زمان» را مدیریت کند تا بتواند به سؤالات همه دروس پاسخ بدهد.

■ تکنیک بعلاوه منها (+ -) را چگونه اجرا کنیم؟

به‌طور کلی سؤالات هر آزمون را می‌توان به سه گروه زیر تقسیم کرد:

① سؤالاتی که پاسخ آن‌ها را می‌دانیم.

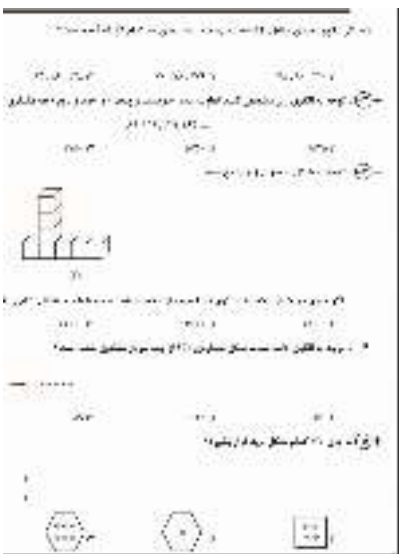
② سؤالاتی که پاسخ آن‌ها را نمی‌دانیم. (سؤالات دشوار).

③ سؤالاتی که اگر وقت بیشتری روی آن‌ها بگذاریم، می‌توانیم پاسخشان را پیدا کنیم.

(سؤالات زمان‌بر)

مثال: تصویر سمت چپ، سؤالات ۱ تا ۵ ریاضی را در دفترچه سؤالات آزمون نشان می‌دهد.

فرض کنید دانش‌آموزی پاسخ سؤال‌های ۱ و ۴ را می‌داند؛ بنابراین ابتدا باید به این سؤالات پاسخ می‌دهد.





اما اگر پاسخ سؤال ۳ را نداند و جواب دادن به آن برایش دشوار باشد، بهتر است وقت خود را تلف نکند و همانطور که در تصویر سمت چپ مشاهده می‌شود، باید دور شماره این سؤال، در دفترچه سؤالات آزمون، یک دایره بکشد، سمت راست آن علامت منها (-) قرار دهد و به سراغ سؤالات بعدی برود. اگر دانش آموز بخواهد به این سؤالات پاسخ بدهد، وقت زیادی از او گرفته خواهد شد و ممکن است حتی به پاسخ درست هم نرسد. پاسخ دادن به سؤالات ۲ و ۵ در نگاه اول ممکن به نظر می‌رسد، اما به وقت زیادی نیاز دارند. در برخورد با این نوع سؤالات هم نباید وقت زیادی صرف کرد. پس باید دور این نوع سؤالات هم دایره کشید و در سمت راست آن علامت (+) قرار داد. معنی علامت (+) این است: «من فعلاً نمی‌خواهم به این سؤال پاسخ بدهم؛ چون وقت زیادی می‌خواهد، اما در پایان آزمون اگر وقت اضافه آوردم، به سراغ آن خواهم آمد». در نرم‌افزار آزمون‌ساز فوق پیشرفته لوح برتر علامت (+) یا (-) در زیر هر سؤال قرار داده شده است و با کلیک روی آن، علامت مذکور پررنگ‌تر خواهد شد و شما می‌توانید در پایان آزمون با مشاهده کارنامه خود، از نتیجه آن مطلع شوید. در کارنامه مذکور نتیجه پاسخگویی به این نوع سؤالات نیز برایتان نمایش داده می‌شود. باید در آزمون‌هایی که از خودتان می‌گیرید، آن قدر از این تکنیک استفاده کنید که در جلسه آزمون اصلی بتوانید به سادگی آن را اجرا و زمان را مدیریت کنید تا بتوانید به سؤالات همه دروس پاسخ بدهید.

خلاصه تکنیک بعلاوه منها این است که ابتدا به سؤالاتی که پاسخ آن‌ها را می‌دانید، جواب می‌دهید و بقیه سؤالات را علامت گذاری (+ یا -) می‌کنید. سپس در پایان آزمون و بعد از پاسخ دادن به آخرین سؤال، بازمی‌گردید و ابتدا به سراغ سؤالات زمان‌بر که با علامت (+) مشخص شده‌اند، می‌روید و در مرحله پایانی، در صورتی که فرصتی باقی مانده باشد، به سراغ سؤالات دشوار (-) می‌روید و به آن‌ها نیز پاسخ می‌دهید. در پاسخ دادن به سؤالات منهدار (-) باید دقت زیادی داشته باشید؛ چون ممکن است جواب آن‌ها منفی شود. اگر از پاسخ درست، مطمئن بودید، آن را علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخ ندادن به این نوع سؤالات به نفع شماست.

در تکنیک منها (-) دور سؤالات دشوار دایره می‌کشیم و سمت راست آن، علامت منها (-) قرار می‌دهیم.

در تکنیک بعلاوه (+) دور سؤالات زمان‌بر دایره می‌کشیم و سمت راست آن، علامت بعلاوه (+) قرار می‌دهیم.

نکات کلیدی و مهم در پاسخگویی به سؤالات چهارگزینه‌ای یا تستی

- ① به فدای مهربان و توانا توکل کنید؛ زیرا هرچه که بخواهد، همان خواهد شد.
- ② با برنامه درس بخوانید و در کارتان تلاش و جدیت داشته باشید.
- ③ در پاسخگویی به سؤالات عجله نکنید. اگر پاسخ سؤالی را نمی‌دانید، با حفظ آرامش به سراغ سؤال بعدی بروید.
- ④ در جلسه آزمون تلاش کنید که آرامش خود را حفظ نمایید. به یاد داشته باشید که اگر سؤالات درس خاصی سفت باشد، این سفتی برای همه دانش‌آموزان است و نباید نگران نتیجه آزمون باشید.
- ⑤ تمام گزینه‌های هر سؤال را با دقت بخوانید؛ شاید آخرین گزینه، کامل‌تر از بقیه گزینه‌ها باشد.
- ⑥ پاسخ سؤالات را بلافاصله در پاسخ‌برگ علامت بزنید. برفی از دانش‌آموزان جواب سؤالات را ابتدا داخل دفترچه سؤال مشخص می‌کنند و در پایان آزمون، جواب‌ها را به داخل پاسخ‌برگ منتقل می‌کنند. این کار بسیار خطرناک است؛ چون اولاً وقتتان بیشتر تلف می‌شود، ثانیاً اگر پاسخ یک سؤال جابه‌جا شود، تمام پاسخ‌های بعد از آن سؤال نیز جابه‌جا خواهند شد.
- ⑦ از تکنیک‌های «مهندسی معکوس» و «بعلاوه - منها» در آزمون‌هایی که در منزل از خودتان می‌گیرید، استفاده کنید تا در اجرای آن‌ها در جلسه آزمون اصلی، مهارت لازم و کافی را پیدا کنید.
- ⑧ بعد از پاسخ دادن به هر ده سؤال، یک بار، شماره سؤالات پاسخ‌برگ را با شماره سؤالات دفترچه سؤال مطابقت دهید و از جابه‌جا نشدن پاسخ‌های خود مطمئن شوید.

۹ با استفاده از نرم افزار آزمون ساز فوق پیشرفته ای که در اختیار دارید، مهارت های تست زنی خود را افزایش دهید و تلاش کنید تا در هر آزمون، تعداد پاسخ های اشتباهتان را در مقایسه با آزمون های قبلی کاهش دهید. در ابتدا سعی کنید بیشتر از آزمون های مبهمی و درس به درس استفاده کنید؛ اما در چند هفته باقی مانده تا آزمون اصلی، از آزمون های جامع استفاده کنید.

۱۰ اگر پاسخ سؤالی را نمی دانید، هرگز به آن جواب ندهید.

۱۱ در جلسه آزمون، ساعت به همراه داشته باشید و بعد از پاسخ دادن به هر ۱۰ سؤال، به ساعت خود نگاهی بیندازید و تلاش کنید زمان باقی مانده را به فوبی بین سؤالات درس های مختلف تقسیم کنید. برای مدیریت زمان، تکنیک بعلاوه منها (+ -) را فراموش نکنید.

۱۲ از اتود (مداد نوکی) برای پاسخ دادن به سؤالات استفاده نکنید. مداد مشککی نرم، بهترین وسیله برای پاسخ دادن به سؤالات است.

۱۳ یک عدد مداد تراش و یک عدد پاک کن فوب، همراه داشته باشید.

۱۴ دعای پدر و مادر سرمایه فوبی برای کمک فداوند متعال به شماست.

پاسخبرگ سوالات تستی انتشارات لوح برتر

دانش آموز گرامی! می‌توانید از این پاسخبرگ تمرینی، به تعداد دلخواه تکثیر کنید و برای پاسخ دادن به سؤال‌ها از آن استفاده کنید. با مداد مشکی نرم، خانه‌ها را به‌طور کامل پر کنید. برای درصدهای بخش تکنیک‌های تست‌زنی را مطالعه کنید.

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴

۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴

۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴

۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴

۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴



نام و نام خانوادگی:

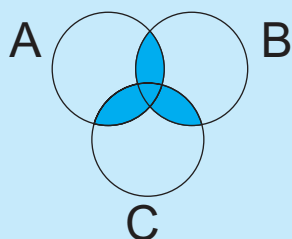
تاریخ آزمون:

شماره آزمون:

نوع آزمون:

جدول محاسبه نتیجه آزمون

نام درس	درست	نادرست	نژده	درصد
جمع کل				



مجموعه‌ها

۱

ممتوا و فهرست موضوعی فصل



- ◆ **مبحث اول: مفهوم مجموعه‌ها**
- ۱۷..... انواع مجموعه
- ۱۹..... بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل
- ۲۰..... زیرمجموعه و تعداد آن‌ها
- ۲۵..... مجموعه توانی
- ۲۵..... تبدیل نماد ریاضی مجموعه به اعضا
- ۲۷..... تبدیل اعضا به نماد ریاضی
- ۲۸..... تست‌های مبحث اول
- ۲۹..... پاسخ‌نامه تشریحی و آموزشی
- ◆ **مبحث دوم: اعمال مجموعه‌ها (اشتراک، اجتماع، تفاضل، متمم)**
- ۳۱..... اشتراک مجموعه‌ها
- ۳۲..... اجتماع مجموعه‌ها
- ۳۳..... $n(A \cup B)$ و $n(A \cap B)$
- ۳۴..... تفاضل مجموعه‌ها
- ۳۵..... تفاضل متقارن
- ۳۸..... مجموعه مرجع (جهانی، مادر)
- ◆ **مجموعه متمم**..... ۳۸
- ◆ **تست‌های مبحث دوم**..... ۴۱
- ◆ **پاسخ‌نامه تشریحی و آموزشی**..... ۴۲
- ◆ **مبحث سوم: احتمال**
- ۴۳..... فضای نمونه‌ای
- ۴۳..... پیشامد
- ۴۴..... اصل ضرب (شمارش)
- ۴۷..... احتمال سطح و حجم
- ۴۸..... مسائل ترکیبی
- ۴۹..... تست‌های مبحث سوم
- ۵۰..... پاسخ‌نامه تشریحی و آموزشی
- ◆ **سؤالات تشریحی و تست‌های جامع فصل اول**
- ۵۱..... سؤالات تشریحی فصل اول
- ۵۳..... پاسخ‌نامه سؤالات تشریحی
- ۵۵..... تست‌های جامع فصل اول
- ۵۸..... پاسخ‌نامه تشریحی و آموزشی

مبحث اول

..... مفهوم مجموعه‌ها



مفهوم مجموعه، مانند نقطه و خط، بسیار بدیهی و پایه‌ای بوده و برای آن تعریفی ارائه نمی‌کنند، ولی می‌توان گفت: مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیا به کار می‌رود که:

۱) مشخص باشند. (عضو بودنشان واضح باشد).

۲) متمایز (غیرتکراری) باشند.



اینکه تعداد اعضا بی‌شمار و نام بردن همه آن‌ها سخت یا غیرممکن باشد، مجموعه بودن را نقض نمی‌کند ولی مبهم بودن ویژگی‌ها و بیان صفت‌های تقریبی و نسبی که نظرات را در مورد اعضا متفاوت و سلیقه‌ای می‌کند، ناقض مجموعه بودن است.



کدام یک از موارد زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

✓ بی‌شمارند ولی تعریف ستاره و کهکشان راه شیری مشخص است.

✓ بسیاریند ولی تعریف شاعر و معاصر مشخص است.

✗ کدام ۵ تا؟! انتخاب این ۵ نفر سلیقه‌ای است.

✗ چند عدد طبیعی؟ چند واحد اختلاف را نزدیکی می‌دانیم؟

✗ از چند شروع شود؟ ... و ۱۳ و ۷ و ۱ یا ... و ۱۴ و ۸ و ۲ یا ...

✓ مشخص است ... و ۱۶ و ۹ و ۴ و ۱

✓ مشخص است که فقط عدد صفر این گونه است.

✓ کلاً ۴ عدد اول یک رقمی داریم: ۲ و ۳ و ۵ و ۷

✓ مشخص است که شامل هیچ عددی نیست. (مجموعه تهی)

الف) ستارگان کهکشان راه شیری:

ب) شعرای معاصر ایران:

ج) ۵ نفر از دانشمندان فیزیک هسته‌ای:

د) اعداد طبیعی نزدیک به ۱۷:

هـ) دنباله اعداد طبیعی با فاصله‌های متوالی ۶ واحد:

و) مجذور کامل‌های طبیعی:

ز) اعداد نامثبت نامنفی:

ح) چهار عدد اول یک رقمی:

ط) اعداد صحیح بین ۱ و ۲:



معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم. اعضای مجموعه را داخل {آکولاد} قرار داده و بین آن‌ها «و» یا «،» می‌گذاریم؛ مثلاً:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$



جابه‌جایی اعضا و تکراری نوشتن اعضا، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً:

$$\{2, 3, 4\} = \{3, 2, 3, 4, 4, 2\}$$

{ت، ا، و، ن، م} = مجموعه حروف عبارت «منم ممنون نام تو»

ولی در مجموعه‌هایی که بی‌شمار عضو دارند و یا در آن‌ها از سه نقطه (...) استفاده می‌کنیم، رعایت ترتیب اعضا برای حفظ الگو و رابطه بین آن‌ها لازم است.



نوشتن مجموعه {۳، ۶، ۹، ۱۲، ...} به شکل {۱۲، ۹، ۳، ۶، ...} مجاز نیست.

انواع مجموعه

چند مجموعه عددي معروف

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ فرد}$$

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \text{ زوج}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ طبيعي}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ حسابي}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ صحيح}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \begin{array}{l} \text{صورت و مخرج صحيح} \\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \\ \text{مخرج ناصفر} \end{array} \right\}$$

اعدادی که گویا نباشند $\mathbb{Q}'$ (یا $\mathbb{Q}^c$): گنگ (اصم)

همه اعداد $\mathbb{R}$: حقيقي

(مجموعه عددهای گنگ و حقيقي، در فصل ۲ کامل معرفی خواهند شد.)

عدد اصلي

تعداد عضوهای مجموعه A را عدد اصلي آن مجموعه گوییم و با $n(A)$ (یا $|A|$) نمایش می دهیم.



$$A = \{1, 11, 14, 5\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$B = \{7, 11, 15, \dots, 87\} \Rightarrow \text{تعداد} = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{فاصله متوالی}} + 1 = \frac{87 - 7}{4} + 1 = 21 \Rightarrow n(B) = 21$$

$$C = \{2^{15} + 1, 2^{15} + 2, 2^{15} + 3, \dots, 2^{16}\} \Rightarrow 2^{16} = 2^{15} \times 2 = 2^{15} + 2^{15} \Rightarrow C = \{2^{15} + 1, 2^{15} + 2, 2^{15} + 3, \dots, 2^{15} + 2^{15}\} \Rightarrow n(C) = 2^{15}$$

مجموعه یکانی

مجموعه ای که یک عضو دارد.

مجموعه متناهی

مجموعه های با پایان که تعداد عضوهای محدودی دارند را متناهی گوییم.

مجموعه نامتناهی

مجموعه های بی پایان که بی شمار عضو دارند را نامتناهی می گوییم و معمولاً در ابتدا یا انتهای این مجموعه از «...» استفاده می شود.



متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه مورچه های کره زمین: متناهی، بسیارند ولی تعدادشان محدود است.

ب) مجموعه $\{1, 3, 5, \dots, 9067\}$: متناهی

ج) مجموعه اعداد اول: نامتناهی

د) مجموعه شمارنده های عدد ۱۰۰۰: متناهی، $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, \dots, 1000\}$

هـ) مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰۰۰: نامتناهی: $\{10000 \times 1, 10000 \times 2, 10000 \times 3, \dots\}$

برای یافتن n آمین عضو مجموعه، الگوی میان شماره اعداد و خود اعداد را می یابیم، یعنی باید بفهمیم چگونه می توان شماره ترتیب را به

خود عضو تبدیل کرد.



بیستمین عدد دنباله را بیابید.

الف $A = \{4, 10, 16, 22, \dots\}$

شماره	۱	۲	۳	...	۲۰
عدد	۴	۱۰	۱۶	...	۱۱۸
الگو	$6 \times (1) - 2$	$6 \times (2) - 2$	$6 \times (3) - 2$	...	$6 \times (20) - 2$

ب $B = \{1, 8, 27, 64, \dots\}$

شماره	۱	۲	۳	۴	...	۲۰
عدد	۱	۸	۲۷	۶۴	...	۸۰۰۰
الگو	$(1)^3$	$(2)^3$	$(3)^3$	$(4)^3$	...	$(20)^3$

ج $C = \{3, 6, 12, 24, \dots\}$

شماره	۱	۲	۳	...	۲۰
عدد	$3 = 3 \times 2^0$	$6 = 3 \times 2^1$	$12 = 3 \times 2^2$	...	3×2^{19}
الگو	$3 \times 2^{(1)-1}$	$3 \times 2^{(2)-1}$	$3 \times 2^{(3)-1}$	...	$3 \times 2^{(20)-1}$

مجموعه تهی

مجموعه‌ای که عضوی ندارد را تهی نامیده و با $\{\}$ یا $\emptyset$ نشان می‌دهیم.



هر چه داخل آکولاد اصلی باشد، عضو مجموعه است. پس مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ ، $\{\{\}\}$ و $\{\emptyset\}$ یکانی بوده و تهی نیستند.



مجموعه‌های زیر تهی می‌باشند.

ب مجموعه مجذور کامل‌هایی که یکانشان ۷ باشد.

الف مجموعه اعداد یک رقمی بزرگتر از ۱۴.

د مجموعه شمارنده‌های مرکب عدد ۱۰۱.

ج مجموعه اعداد اول بین ۹۰ و ۹۷.



ممکن است اعضای مجموعه، خودشان مجموعه باشند. برای تشخیص تعداد اعضا باید توجه داشت هر آکولادی که باز می‌شود، تا جایی که بسته می‌شود یک عضو را مشخص می‌کند.



مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

الف $A = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{\}\}\} \Rightarrow \text{اعضا: } \{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}, \{\}\} \Rightarrow n(A) = 5$

ب $B = \{\{\}, \{1, 2, 3, \dots, 19\}, \{\{1, 2, 3, \dots, 19\}\}\} \Rightarrow \text{اعضا: } \{\}, \{1, 2, 3, \dots, 19\}, \{\{1, 2, 3, \dots, 19\}\} \Rightarrow n(B) = 3$

ج $C = \{\{3, 4, \{3, 4, 5\}\}, \{7, \emptyset\}\} \Rightarrow \text{اعضا: } \{3, 4, \{3, 4, 5\}\}, \{7, \emptyset\} \Rightarrow n(C) = 2$



برای نمایش عضو بودن در مجموعه از نماد $\in$ و برای عضو نبودن (عدم عضویت) از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم.

در مجموعه $A = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \{0, 1\}\}\}$ داریم:

$$\emptyset \in A, 1 \in A, \{\emptyset, 1\} \in A, \{\emptyset, \{0, 1\}\} \in A$$

$$\{\emptyset\} \notin A, \{\{\emptyset, 1\}\} \notin A, \{\emptyset, \emptyset\} \notin A, \{\emptyset, 2\} \notin A$$

بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل

مجموعه A نسبت به یک عمل بسته است، به شرط اینکه حاصل این عمل روی هر دو عضو دلخواه A (حتی تکراری)، عضوی از A باشد. برای نشان دادن بسته بودن، آوردن یک مثال نقض کافی است.

مثال ۸: $B = \{-1, 0, 1\}$ نسبت به کدام یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

$$\left. \begin{array}{lll} -1 \times 0 = 0 \in B & -1 \times 1 = -1 \in B & 0 \times 1 = 0 \in B \\ -1 \times -1 = 1 \in B & 0 \times 0 = 0 \in B & 1 \times 1 = 1 \in B \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت به ضرب بسته است}$$

$$(1) + (1) = 2 \notin B \text{ و } (1) - (-1) = 2 \notin B$$

B نسبت به جمع و تفریق بسته نیست، زیرا:

و نسبت به تقسیم بسته نیست، زیرا تقسیم بر صفر تعریف نشده است. $\left(\frac{-1}{0}\right)$ (معنا ندارد)

مجموعه اعداد گویا نسبت به کدام یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

پاسخ: حاصل جمع، حاصل تفریق و حاصل ضرب هر دو کسر دلخواه، یک کسر (عدد گویا) است، لذا $\mathbb{Q}$ نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته است. (ولی تقسیم بر صفر تعریف نشده است)

مجموعه اعداد مجذور کامل طبیعی نسبت به یکی از چهار عمل اصلی بسته است. آن را بیابید.

$$A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\} \text{ یا } \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

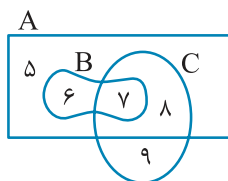
$$\left. \begin{array}{l} x^2 \in A, y^2 \in A \Rightarrow x^2 \times y^2 = (x \times y)^2 \in A \\ \text{مثلاً } 5^2 \in A, 7^2 \in A \Rightarrow 5^2 \times 7^2 = 35^2 \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت به ضرب بسته است}$$

عمل $*$ را به این شکل تعریف می کنیم که $a * b = a^{b+1}$. آیا مجموعه $E = \{0, 1\}$ نسبت به عمل $*$ بسته است؟

$$\left. \begin{array}{l} 0 * 1 = 0^{1+1} = 0 \in E, 0 * 0 = 0^{0+1} = 0 \in E \\ 1 * 0 = 1^{0+1} = 1 \in E, 1 * 1 = 1^{1+1} = 1 \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت به } * \text{ بسته است.}$$

نمودار ون

برای نمایش دادن ساده و ملموس تر مجموعه ها و ارتباط و اشتراک مجموعه ها، عضوهای هر مجموعه را داخل یک خط بسته (به شکل دلخواه) قرار می دهیم. این را نمایش مجموعه با نمودار ون می گویند.



$$A = \{5, 6, 7, 8\}, B = \{6, 7\}, C = \{7, 8, 9\}$$

با توجه به نمودار ون زیر داریم:

مجموعه های مساوی

اگر تمام اعضای A و B یکسان باشند (هم تعداد و هم خود اعضا) می نویسیم $A = B$.



مثال ۱۳ اگر داشته باشیم $\{x+5, 2\} = \{2x-3y\}$ ، مقدار x و y چند است؟



پاسخ: مجموعه سمت راست یک عضو دارد، پس مجموعه سمت چپ نیز باید یک عضو داشته باشد، لذا $x+5$ و $2x-3y$ مساوی با ۲ هستند.

$$x+5=2 \Rightarrow x=2-5=-3 \quad \text{و} \quad 2x-3y=2 \Rightarrow 2(-3)-3y=2 \Rightarrow -6-3y=2 \Rightarrow y=\frac{-8}{3}$$

مثال ۱۴ اگر $\{1, 2, 3\} = \{\frac{1}{2}, 2x, 3y\}$ باشد، حاصل $x+y$ چه اعدادی می تواند باشد؟



پاسخ: از آنجایی که $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = 3$ ، لذا $\{2x, 3y\} = \{1, 2\}$

$$\begin{cases} 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 3y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x+y=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x+y=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

همارز

دو مجموعه A و B همارزند، هرگاه تعداد اعضایشان برابر باشد.



دو مجموعه $A = \{5, 6\}$ و $B = \{0, 0, 1, 0, 1\}$ همارزند زیرا $n(A) = n(B) = 2$.



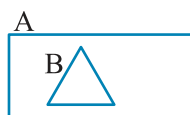
همارز بودن با مساوی بودن مجموعه ها فرق دارد، زیرا در همارزی قرار نیست خود اعضا یکسان باشند.

زیرمجموعه و تعاد آنها

اگر تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B نیز باشد (A داخل B)، گوییم A زیر مجموعه B است و می نویسیم $A \subseteq B$. برای نمایش زیرمجموعه بودن از $\subseteq$ استفاده می کنیم.



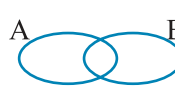
$$A \subseteq B$$



$$B \subseteq A$$



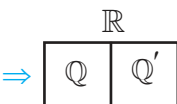
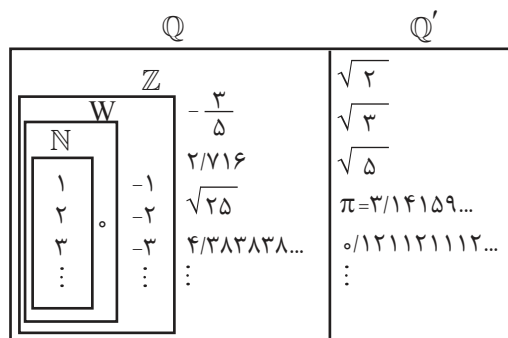
$$A \not\subseteq B$$



$$A \not\subseteq B$$



درباره مجموعه های معروف عددی داریم:



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \quad \text{و} \quad Q' \subseteq R$$

طبیعی حسابی صحیح گویا حقیقی گنگ حقیقی



اگر $S = \{5, 11\}$ و $W = \{5, 6, 7, 10, 11\}$ و $T = \{5, 7, 11\}$ می توان نوشت:

$$S \subseteq T, S \subseteq W, T \subseteq W$$

$$T \not\subseteq S, W \not\subseteq S, W \not\subseteq T$$



$A \subseteq B$ قابل جابه‌جایی نیست، مگر آنکه $A = B$. (یعنی از $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ نتیجه می‌شود که $A = B$)



هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است. $A \subseteq A$ ، $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ ، $F \subseteq F$ ، $\emptyset \subseteq \{ \}$



مجموعه تهی، زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست. $\emptyset \subseteq B$ ، $\{ \} \subseteq \mathbb{Q}'$ ، $\emptyset \subseteq \emptyset$



عضوهای مجموعه $A = \{ \emptyset, 1, \{ \emptyset, 1 \}, \{ \{ \emptyset, 1 \} \} \}$ را مشخص کنید و ۷ تا از زیرمجموعه‌های آن را بنویسید.



اگر یک یا چند عضو را داخل یک آکولاد بنویسیم، زیرمجموعه ایجاد می‌شود.

پاسخ:

$$\emptyset \in A, 1 \in A, \{ \emptyset, 1 \} \in A, \{ \{ \emptyset, 1 \} \} \in A$$

$$\{ \emptyset \} \subseteq A, \{ 1 \} \subseteq A, \{ \{ \emptyset, 1 \} \} \subseteq A, \{ \{ \{ \emptyset, 1 \} \} \} \subseteq A$$

$$\{ \emptyset, 1 \} \subseteq A, \{ \emptyset, \{ \emptyset, 1 \} \} \subseteq A, \{ \emptyset, \{ \{ \emptyset, 1 \} \} \} \subseteq A, \emptyset \subseteq A, A \subseteq A \text{ و } \dots$$



مجموعه‌ای چهارعضوی بنویسید که هر عضو، زیرمجموعه‌اش نیز باشد.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \emptyset \subseteq A \quad \text{همواره} \\ \emptyset \in A \Rightarrow \{ \emptyset \} \subseteq A \\ \{ \emptyset \} \in A \Rightarrow \{ \{ \emptyset \} \} \subseteq A \\ \{ \{ \emptyset \} \} \in A \Rightarrow \{ \{ \{ \emptyset \} \} \} \subseteq A \end{array} \right\} \Leftrightarrow A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \{ \{ \emptyset \} \} \} \}$$

زیرمجموعه محض

تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه غیر تهی، جز خودش، زیرمجموعه‌های محض (سره) آن مجموعه‌اند.

زیرمجموعه بدیهی

$\emptyset$ و خود هر مجموعه را زیرمجموعه‌های بدیهی آن مجموعه گویند.



زیرمجموعه زیرمجموعه A ، زیرمجموعه A است، یعنی از $B \subseteq A$ و $C \subseteq B$ نتیجه می‌شود که $C \subseteq A$.



زیرمجموعه‌های مجموعه‌های زیر را بنویسید.



برای آنکه زیرمجموعه‌ای از قلم نیفتد، به ترتیب، زیرمجموعه‌های صفر عضوی (تهی)، یک عضوی، ... و n عضوی (خود مجموعه) را می‌نویسیم.



پاسخ:

الف $A = \emptyset \Rightarrow \{ \} : \text{عضوی} \Rightarrow (2^0) \text{ یک زیرمجموعه}$

ب $B = \{9\} \Rightarrow \begin{cases} \{ \} : \text{عضوی} \\ \{9\} : \text{عضوی ۱} \end{cases} \Rightarrow (2^1) \text{ دو زیرمجموعه}$

ج $C = \{5, 8\} \Rightarrow \begin{cases} \{ \} : \text{عضوی} \\ \{8\} \text{ و } \{5\} : \text{عضوی ۱} \\ \{5, 8\} : \text{عضوی ۲} \end{cases} \Rightarrow (2^2) \text{ چهار زیرمجموعه}$

د $D = \{4, 5, 6\} \Rightarrow \begin{cases} \{ \} : \text{عضوی} \\ \{6\} \text{ و } \{5\} \text{ و } \{4\} : \text{عضوی ۱} \\ \{5, 6\} \text{ و } \{4, 6\} \text{ و } \{4, 5\} : \text{عضوی ۲} \\ \{4, 5, 6\} : \text{عضوی ۳} \end{cases} \Rightarrow (2^3) \text{ هشت زیرمجموعه}$

نتیجه: تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه n عضوی برابر است با 2^n .

$$2^n(A) = A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های}$$

مجموعه‌ای که ۸ عضو دارد، دارای $2^8 = 256$ زیرمجموعه است و مجموعه‌ای که ۶۴ زیرمجموعه دارد ۶ عضو دارد. (زیرا $2^6 = 64$)



مجموعه $\{25^\circ\}$ و $\{\{25\}\}$ و $\frac{5^\circ}{2}$ و $\{25\}$ و $\{5^\circ\}$ چند زیرمجموعه دارد؟



۴ عضو دارد: $1 = 5^\circ$ ، $\{25\}$ ، $\{\{25\}\}$ ، $\frac{5^\circ}{2}$

پاسخ:

در نتیجه $2^4 = 16$ زیرمجموعه دارد.

تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه ۶۳ تا است. آن مجموعه چند عضو دارد؟



با توجه به حذف یک زیرمجموعه از بین 2^n زیرمجموعه، تعداد زیرمجموعه‌های محض $2^n - 1$ است.

۶ عضو $\xrightarrow{2^6=64} 2^n = 64 \Rightarrow 2^n - 1 = 63$

پاسخ:

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+1$ عضوی برابر است با 2^{n+1} . مقدار n را بیابید.



پاسخ:

$2^{n+1} = 2^{2n-3} \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها

$2^{n+1} = (2^3)^{2n-3} \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{6n-9} \Rightarrow n+1 = 6n-9 \Rightarrow n=2$



یک مجموعه ۹ عضوی چند زیرمجموعه با تعداد اعضای فرد دارد؟



به جز تهی، در تمام مجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی برابر است. (با این فرض که تهی را جزء زیرمجموعه‌های زوج عضوی در نظر بگیریم)

پاسخ:

نصف تعداد زیرمجموعه‌ها، فرد عضوی هستند:

$2^9 \div 2 = 2^8 = 256$

یک مجموعه $n + 2$ عضو چند برابر یک مجموعه $n - 3$ عضوی، زیرمجموعه دارد؟



۳۲ برابرش زیرمجموعه دارد. $\Rightarrow 32 = 2^5 =$ نسبت تعداد زیرمجموعه‌ها $\Rightarrow (2^{n+2} \div 2^{n-3} = 2^5)$

پاسخ:

با افزودن یا کاستن m عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها چه تغییری می‌کند؟



$\Rightarrow \div 2$ کاهش یک عضو و $\times 2$ افزودن یک عضو

پاسخ:

$\Rightarrow \div 2^m$ کاهش m عضو و $\times 2^m$ افزودن m عضو $\Rightarrow \underbrace{\div 2 \div 2 \div \dots \div 2}_m = \div 2^m$ و $\underbrace{\times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_m = \times 2^m$

مجموعه A دارای $6 - (n + 3)$ عضو و مجموعه B دارای $n^2 + n - 13$ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های A چند برابر B است؟



$n^2 + 3n - 6 - (3n - 13 + n^2) = n^2 + 3n - 6 - 3n + 13 - n^2 = 7$ اختلاف اعضا

پاسخ:

A, B برابر 128 ، زیرمجموعه دارد. $\Rightarrow 128 = 2^7$: نسبت تعداد زیرمجموعه‌ها

عضوی به مجموعه A اضافه کردیم، 128 تا به زیرمجموعه‌هایش اضافه شد. A چند عضو داشته است؟



پاسخ: روش اول با افزودن یک عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها دو برابر می‌شود، یعنی 128 تا داشته و 128 تا به آن اضافه شده است.

7 عضو داشته است. $\Rightarrow 2^7 = 128$ زیرمجموعه

$n = 7 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n (n - 1) = 128 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow n = 7$ از 2^n فاکتور بگیر

روش دوم

اگر به یک مجموعه n عضوی سه عضو بیفزاییم، 112 تا به زیرمجموعه‌هایش اضافه می‌شود. n چند است؟



پاسخ: اختلاف تعداد زیرمجموعه‌ها یعنی اختلاف 2^{n+3} و 2^n برابر با 112 است. از 2^n فاکتور می‌گیریم.

$n = 4 \Rightarrow 112 = 2^4 \times 7 \Rightarrow 2^n \times 7 = 112 \Rightarrow 2^n (2^3 - 1) = 112 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$

چند زیرمجموعه از اعداد طبیعی یک رقمی می‌توان نوشت که شامل مجذور کامل‌ها باشد، ولی اعداد 2 و 3 در آن نباشد.



پاسخ: در واقع باید از 9 تا یک رقمی، عددهای 1 و 4 و 9 و نیز 2 و 3 که تکلیفشان مشخص است را کنار بگذاریم و با چهار عدد بقیه زیرمجموعه بسازیم.

$2^4 = 16 = 2^{9-5}$

یک مجموعه n عضوی چند زیرمجموعه دارد که شامل p عضو خاص باشند و q عضو خاص در آن‌ها دیده نشوند؟



پاسخ: در واقع از n عضو باید $p + q$ عضو که تکلیف بودن یا نبودنشان در زیرمجموعه مشخص است را کنار بگذاریم و با باقی‌مانده اعضا $(n - (p + q))$ زیرمجموعه بسازیم. لذا تعداد این زیرمجموعه‌ها $2^{n-(p+q)}$ است.

اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ و $B = \{4, 5, \dots, 10\}$ باشد، چند مجموعه X می‌توان نوشت که: $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ ؟ یعنی:



$\{4, 5, 6, 7\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

پاسخ:

$2^6 = 64 = 2^{10-4}$

64 مجموعه با ویژگی X می‌توان نوشت:

تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{1, 2, \dots, 10\}$ را می‌خواهد که حتماً شامل 4 و 5 و 6 و 7 باشند.



تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ که کوچکترین عضوشان ۵ باشد، چقدر است؟

$$2^{1-(1+3)} = 2^7 = 128$$

پاسخ: یعنی شامل ۵ باشد ولی شامل ۲ و ۳ و ۴ نباشد. (از ۱۱ عدد ۴ تا کنار می‌روند)



در چند زیرمجموعه از $\{10, 11, 12, \dots, 20\}$ مجموع کوچکترین و بزرگترین عضو ۲۹ است؟

پاسخ: زیرمجموعه مورد نظر باید شامل یکی از عضوهای اول و آخر $(10, 19)$ ، $(11, 18)$ ، $(12, 17)$ ، $(13, 16)$ و $(14, 15)$ باشد و سایر اعضا فقط از بین آن دو عدد انتخاب شوند که به ترتیب $2^8 = 256$ ، $2^6 = 64$ ، $2^4 = 16$ ، $2^2 = 4$ و $2^0 = 1$ حالت را شامل می‌شوند، یعنی در مجموع ۳۴۱ حالت (زیرمجموعه) را شامل می‌شود.



مجموعه $\{\{1, 5\}, \{1, 5, \{\}\}, \{\{1, 5, \{\}\}\}\}$ چند زیرمجموعه دوعضوی دارد؟

پاسخ: این مجموعه شامل ۵ عضو متمایز است که زیر آن‌ها خط کشیده‌ایم. لذا طبق نکته (۱۸)، $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ ، زیرمجموعه ۲ عضوی دارد.



با دانستن آنکه $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ (ان فاکتوریل) داریم:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

■ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه n عضوی:

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

■ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از یک مجموعه n عضوی:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k}$$

■ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی:



یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟

$$\frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210$$

پاسخ:



یک مجموعه ۹ عضوی چند زیرمجموعه حداکثر ۶ عضوی دارد؟

تعداد زیرمجموعه‌های ۹ عضوی: ۱

پاسخ: تعداد کل زیرمجموعه‌ها: $2^9 = 512$

تعداد زیرمجموعه‌های ۸ عضوی:

$$\frac{9!}{8!(9-8)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 8 \times 1} = 9$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی:

$$\frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 7 \times 1 \times 2} = 36$$

حداکثر ۶ عضوی یعنی از کل زیرمجموعه‌ها، ۹ عضوی و ۸ عضوی و ۷ عضوی را کنار بگذاریم:

$$512 - (1 + 9 + 36) = 466$$



در یک مجموعه ۱۷ عضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۱۲ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های چند عضوی برابر است؟

$$16 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$



در یک مجموعه n عضوی با توجه به تقارنی که در چپش زیرمجموعه‌ها وجود دارد، می‌توان گفت: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n - k$ عضوی برابر است.

پاسخ: گزینه «۲»

تعداد زیرمجموعه‌های $12 = 17 - 5$ عضوی با زیرمجموعه‌های $17 - 12 = 5$ عضوی برابر است.



در یک مجموعه، تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی ۲۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی است. تعداد عضوها را بیابید.

$$\frac{\text{سه عضوی}}{\text{دو عضوی}} : \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n-2}{3} = 26 \Rightarrow n-2 = 3 \times 26 = 78 \Rightarrow n = 78 + 2 = 80$$

پاسخ:

مجموعه توانی

مجموعه همه زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی A گوئیم و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم:

مجموعه توانی $\{1, 2, 3\}$ را بنویسید.



$$P(\{1, 2, 3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

پاسخ: مجموعه‌ای شامل همه زیرمجموعه‌ها:

نتیجه: تعداد اعضای مجموعه توانی A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های A یعنی $2^{n(A)}$.

مجموعه $P(P(P(\emptyset)))$ چند عضو دارد؟



$$\emptyset : \text{عضو} = 0 \Rightarrow P(\emptyset) : \text{عضو} = 1 \Rightarrow P(P(\emptyset)) : \text{عضو} = 2 \Rightarrow P(P(P(\emptyset))) : \text{عضو} = 4$$

پاسخ:

تبدیل نماد ریاضی مجموعه به اعضا

در نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی، ابتدا شکل جبری عضوها و سپس شرطهایی برای متغیر بیان می‌شود تا با جایگذاری مقدارهای معرفی شده در عبارت جبری، مقدار عضو به دست آید.



۱۹ $x > a$ اعداد بزرگتر از a ، $x < a$ اعداد کوچکتر از a و $a < x < b$ اعداد بین a و b را نشان می‌دهد. در عبارتی مانند $a \leq x < b$ می‌تواند مساوی a هم باشد، زیرا علامت مساوی دارد ($a \leq x$) ولی $x = b$ موردنظر نیست.

اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.



الف) $A = \{1 - 5x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq -2\}$

پاسخ: اعداد صحیح بین -5 و -2 عبارت‌اند از -3 و -4 ، خود $x = -2$ نیز قبول است. این سه عدد را در $1 - 5x$ جایگذاری می‌کنیم.

$$A = \{1 - 5(-2), 1 - 5(-3), 1 - 5(-4)\} = \{11, 16, 21\}$$

ب) $B = \{x^2 - 2^x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2/7\}$

پاسخ: گرچه $x = 2/7$ نیز ذکر شده است ولی $2/7 \notin \mathbb{N}$ ، اعداد طبیعی کوچکتر از $2/7$ یعنی 1 و 2 را در $x^2 - 2^x$ جایگذاری می‌کنیم.

$$B = \{(1)^2 - 2^{(1)}, (2)^2 - 2^{(2)}\} = \{-1, 0\}$$

ج) $C = \{1^{4^{5x+2}} \mid x \in \mathbb{W}, -4 \leq x < 0/972\}$

پاسخ: بین $0/972$ و -4 تنها عدد حسابی $x = 0$ است.

$$C = \{1^{4^{5(0)+2}}\} = \{1^{4^2}\} = \{1^{16}\}$$

د) $D = \{x^y - 2xy \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}, x + y = 4\}$

$$(x, y) = (1, 3) \text{ یا } (2, 2) \text{ یا } (3, 1)$$

پاسخ: کدام جفت اعداد طبیعی جمعشان ۴ می‌شود.

$$D = \{(1)^{(3)} - 2(1)(3), (2)^{(2)} - 2(2)(2), (3)^{(1)} - 2(3)(1)\} = \{-5, -4, -3\}$$



$$\text{هـ} \quad E = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 2, \frac{12}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

پاسخ: از $\frac{12}{x+1} \in \mathbb{Z}$ نتیجه می‌شود که ۱۲ بر $x+1$ بخش‌پذیر است، پس $x+1$ مساوی با ± 1 و ± 2 و ± 3 و ± 4 و ± 6 و ± 12 می‌باشد، در نتیجه خود x مساوی با ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ می‌باشد و لذا:

$$E = \{0, 1, -2, -3, -4, -5, -7, -13\}$$

(اگر شرط $x \in \mathbb{Z}$ نبود بی‌شمار جواب داشتیم؛ زیرا از تقسیم ۱۲ بر $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{-2}{7}$ و $\frac{3}{19}$ و ... نیز عددی صحیح به‌دست می‌آید.)

$$\text{و} \quad F = \left\{ \frac{x+2}{2-x} \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq 2x+5 \leq 1 \right\}$$

$$-1 \leq 2x+5 \leq 1 \xrightarrow{\text{هر سه منهای ۵ شوند}} -6 \leq 2x \leq -4 \xrightarrow{\text{هر سه ۲ ÷ شوند}} -3 \leq x \leq -2$$

پاسخ:

$$F = \left\{ \frac{(-2)+2}{2-(-2)}, \frac{(-3)+2}{2-(-3)} \right\} = \left\{ 0, -\frac{1}{5} \right\}$$

۲- و ۳- را در $\frac{x+2}{2-x}$ جایگذاری می‌کنیم.

$$\text{ز} \quad G = \left\{ x \mid x > 0, \sqrt{30-2x} \in \mathbb{W} \right\}$$

پاسخ: برای آن‌که حاصل جذر، حسابی باشد، باید $30-2x$ مجذور کامل باشد مانند ۰ و ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ که از تساوی $30-2x$ با تکتک آن‌ها این جواب‌ها به‌دست می‌آید.

$$G = \left\{ 15, \frac{29}{2}, 13, \frac{21}{2}, 7, \frac{5}{2} \right\}$$

$$\text{ح} \quad H = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, 30 \leq 3x^2 \leq 60 \right\}$$

$$30 \leq 3x^2 \leq 60 \xrightarrow{\text{هر سه ۳ ÷ شوند}} 10 \leq x^2 \leq 20$$

پاسخ:

$$H = \{+4, -4\} \leftarrow \pm 4$$

توان دوم کدام عدد صحیح بین ۱۰ و ۲۰ قرار دارد؟

$$\text{ط} \quad I = \left\{ \frac{(-1)^x}{x} \mid 3x \in \mathbb{Z}, 2 < x < 4 \right\}$$

پاسخ:

$$2 < x < 4 \xrightarrow{\times 3} 6 < 3x < 12 \Rightarrow 3x = \begin{cases} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 3 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{11}{3} \end{cases}$$

عدد ۱- به توان زوج برابر با ۱ و به توان فرد برابر با ۱- می‌باشد.
(زوج و فرد بودن صورت کسر توان، مهم است)

$$I = \left\{ \frac{(-1)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}, \frac{(-1)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}, \frac{(-1)^3}{3}, \frac{(-1)^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}}, \frac{(-1)^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} \right\} = \left\{ -\frac{3}{7}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, -\frac{3}{11} \right\}$$

$$\text{ی} \quad K = \left\{ \frac{4^{x+2y}}{8^{y-1}} \mid 2-y=2x \right\}$$

پاسخ:

$$2-y=2x \Rightarrow 2x+y=2 \quad (*)$$

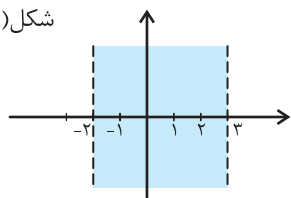
$$\frac{4^{x+2y}}{8^{y-1}} = \frac{(2^2)^{x+2y}}{(2^3)^{y-1}} = \frac{2^{2x+4y}}{2^{3y-3}} = 2^{2x+4y-(3y-3)} = 2^{2x+y+3} \stackrel{(*)}{=} 2^{(2)+3} = 2^5 \Rightarrow K = \{32\}$$

مجموعه $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right] \mid -2 < x < 3, 1 < y \leq 3 \right\}$ را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.

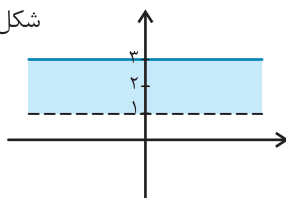


پاسخ: مجموعه نقاطی است که طولشان بین ۲- و ۳ (شکل ۱) و عرضشان بین ۱ و ۳ (و خود ۳) باشد (شکل ۲)

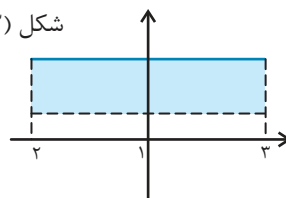
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



از ادغام (اشتراک) این دو شکل، مجموعه مورد نظر به دست می آید. (شکل ۳) مجموعه نقاطی که هر دو شرط را داشته باشند، یک مستطیل را تشکیل می دهند.

مجموعه $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\}$ چند عضو دارد؟



ممکن است تعداد عددهایی که جای متغیر می گذاریم از تعداد عضوهای مجموعه بیشتر باشد، چرا که ممکن است برخی حاصل ها مساوی شوند.

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\} = \{(-2)^2, (-1)^2, (0)^2, (1)^2, (2)^2\} = \{4, 1, 0\} \Rightarrow \text{سه عضو}$$

$-2, -1, 0, 1, 2$

پاسخ:

تبدیل اعضا به نماد ریاضی

باید یک الگوی جبری یکسان برای تمام اعضا بیابیم، به طوری که عملیاتی یکسان روی چند عدد متوالی را نشان دهد، سپس اعداد متوالی را به متغیر تبدیل می کنیم.

الف $A = \{-7, -14, -21, \dots\} = \{-7 \times (1), -7 \times (2), -7 \times (3), \dots\} = \{-7x \mid x \in \mathbb{N}\}$

$1, 2, 3, \dots$

ب $B = \{4, 7, 10, \dots, 64\} = \{3(1) + 1, 3(2) + 1, \dots, 3(21) + 1\} = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 21\}$

$1, 2, 3, \dots, 21$

ج $C = \{9, 16, 25, 36, \dots\} = \{(3)^2, (4)^2, (5)^2, \dots\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 3\}$

$3, 4, 5, 6, \dots$

د $D = \left\{ \frac{32}{7}, \frac{64}{8}, \frac{128}{9}, \dots, \frac{2048}{13} \right\} = \left\{ \frac{2^{(5)}}{(5)+2}, \frac{2^{(6)}}{(6)+2}, \frac{2^{(7)}}{(7)+2}, \dots, \frac{2^{(11)}}{(11)+2} \right\} = \left\{ \frac{2^x}{x+2} \mid x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x \leq 11 \right\}$

$5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

ه $E = \{26, 7, 0, -1, \dots\} = \{27 - 1, 8 - 1, 1 - 1, 0 - 1, \dots\} = \{(3)^x - 1, (2)^x - 1, (1)^x - 1, (0)^x - 1, \dots\} = \{x^x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 3\}$

$3, 2, 1, 0, \dots$

و $F = \{1, 11, 102, 1003, \dots\} = \{1, 10 + 1, 100 + 2, 1000 + 3, \dots\} = \{1 \cdot (0) + (0), 1 \cdot (1) + (1), 1 \cdot (2) + (2), \dots\} = \{1 \cdot x + x \mid x \in \mathbb{W}\}$

$0, 1, 2, \dots$

ز $G = \{-1, 4, -27, 256, \dots\} = \{-1 \times 1, 2 \times 2, -3 \times 3 \times 3, 4 \times 4 \times 4 \times 4, \dots\} = \{-1^1, +2^2, -3^3, +4^4, \dots\}$

$$= \{(-1)^1 \times 1^1, (-1)^2 \times 2^2, (-1)^3 \times 3^3, (-1)^4 \times 4^4, \dots\} = \{(-1)^x \times x^x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$1, 2, 3, \dots$



یکی در میان، منفی شدن اعضا معمولاً توسط $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ ایجاد می شود.

ح $\{6, 66, 666, 6666, 66666, 666666\} = \{6 \times 1, 6 \times 11, 6 \times 111, 6 \times 1111, 6 \times 11111\} = \{6 \times \frac{9}{9}, 6 \times \frac{99}{9}, 6 \times \frac{999}{9}, 6 \times \frac{9999}{9}, 6 \times \frac{99999}{9}\}$

$$= \left\{ 6 \times \frac{10^1 - 1}{9}, 6 \times \frac{10^2 - 1}{9}, 6 \times \frac{10^3 - 1}{9}, 6 \times \frac{10^4 - 1}{9}, 6 \times \frac{10^5 - 1}{9} \right\}$$

$$= \left\{ 6 \times \frac{10^{(1)}}{9} - 1, 6 \times \frac{10^{(2)}}{9} - 1, 6 \times \frac{10^{(3)}}{9} - 1, 6 \times \frac{10^{(4)}}{9} - 1, 6 \times \frac{10^{(5)}}{9} - 1 \right\} = \left\{ 6 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 5 \right\}$$

$1, 2, 3, 4, 5$



تست‌های مبتدئ اول

□ □ □ □

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$$

۱. با توجه به مجموعه A ، کدام عبارت زیر درست نیست؟

(۴) $\{\emptyset, \emptyset\} \subseteq A$

(۳) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \subseteq A$

(۲) $\{\emptyset, \emptyset\} \in A$

(۱) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$

$$B = \left\{ \frac{-18}{5}, \frac{-14}{5}, -2, \dots, 22 \right\}$$

۲. مجموعه روبه‌رو چند عضو دارد؟

(۴) ۳۴

(۳) ۳۳

(۲) ۳۲

(۱) ۳۱

۳. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $2k + 2$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $3k - 2$ عضوی است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۸

(۲) ۴

(۱) ۲

۴. نمایش ریاضی مجموعه $\{-1, -4, +9, +16, -25, -36, \dots\}$ برابر است با:

(۲) $\{(-x)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$

(۱) $\{(-1)^x \times x \mid x \in \mathbb{N}\}$

(۴) $\{(-1)^{\frac{x(x+1)}{2}} \times x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

(۳) $\{(-1)^{\frac{x(x-1)}{2}} \times x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{72}{x^2} \in \mathbb{N}\}$$

۵. تعداد عضوهای مجموعه روبه‌رو را به‌دست آورید.

(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۶. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد، در چند زیرمجموعه A ، اعداد ۱ و ۲ حتماً وجود دارند؟

(۴) ۱۶

(۳) ۸

(۲) ۴

(۱) ۳

۷. تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی، ۱۹۱ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n - 2$ عضوی است. مقدار

n کدام گزینه است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۷

۸. مجموعه زیر چند عضو دارد؟

$$A = \{2^{1396} + 2, 2^{1396} + 4, 2^{1396} + 8, 2^{1396} + 16, \dots, 2^{1397}\}$$

(۴) ۱۳۹۶

(۳) ۱۳۹۵

(۲) 2^{1396}

(۱) 2^{1395}

۹. تعداد اعضای مجموعه زیر را مشخص کنید.

$$B = \{x \mid x \leq 0, \sqrt{40 + 3x} \in \mathbb{N}\}$$

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه $n + 2$ عضوی، ۱۵ برابر تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی یک مجموعه n عضوی می‌باشد. مقدار n را بیابید.

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶



پاسخنامه تشریحی و آموزشی تستهای مبحث اول

$$x=1 \Rightarrow \frac{72}{1^2} = 72 \in \mathbb{N}$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{72}{2^2} = 18 \in \mathbb{N}$$

$$x=3 \Rightarrow \frac{72}{3^2} = 8 \in \mathbb{N}$$

$$x=4 \Rightarrow \frac{72}{4^2} \notin \mathbb{N}$$

$$x=5 \Rightarrow \frac{72}{5^2} \notin \mathbb{N}$$

$$x=6 \Rightarrow \frac{72}{6^2} = 2 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow C = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow \text{عضو ۴}$$



گزینه ۳

اعداد ۱ و ۲ را کنار می‌گذاریم، با سه عضو دیگر ۳ زیرمجموعه می‌توان نوشت. (سپس ۱ و ۲ را داخل آن‌ها قرار می‌دهیم.)



گزینه ۷

$$\underbrace{2^n - 1}_{\text{محض}} - 2^{n-2} = 191 \Rightarrow 2^n - \overbrace{2^{n-2}}^{\text{کمتر}} = 192$$

$$\Rightarrow 2^{n-2}(2^2 - 1) = 192 \Rightarrow 2^{n-2} = \frac{192}{3} = 64 = 2^6$$

$$\Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$$



گزینه ۸

$$11397 = 2 \times 11396 = 11396 + 11396$$

$$\Rightarrow A = \{11396 + 1, 11396 + 2, 11396 + 3, \dots, 11396 + 11396\}$$

با توجه به توان‌ها ۱۳۹۶ عضو دارد.



گزینه ۹

$$B = \{x \mid x \leq 0, \sqrt{40 + 3x} \in \mathbb{N}\}$$

$$\sqrt{40 + 3x} = n \Rightarrow \text{عدد طبیعی}$$

$$\Rightarrow n^2 = 40 + 3x \Rightarrow x = \frac{n^2 - 40}{3}$$

$$n=1 \Rightarrow x = -13$$

$$n=2 \Rightarrow x = -12$$

$$n=3 \Rightarrow x = \frac{-31}{3}$$

$$n=4 \Rightarrow x = -8$$

$$n=5 \Rightarrow x = -5$$

$$n=6 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$$n=7 \Rightarrow x = 3 > 0 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\Rightarrow B = \{-13, -12, \frac{-31}{3}, -8, -5, \frac{-4}{3}\} \Rightarrow \text{عضو ۶}$$



گزینه ۴

A اعضای: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

تبی: $\emptyset$
 زیرمجموعه‌های A: تک عضو: $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 دو عضو: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 سه عضو: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

گزینه ۴ عضو مجموعه A است، نه زیرمجموعه. پس $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ غلط است.



گزینه ۳

$$B = \left\{ \frac{-18}{5}, \frac{-14}{5}, \frac{-10}{5}, \dots, \frac{+110}{5} \right\}$$

$$\text{تعداد اعداد: } \frac{110 - (-18)}{4} + 1 = \frac{128}{4} + 1 = 32 + 1 = 33$$



گزینه ۳

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $(3k+2)$ عضو

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $(3k-2)$ عضو

$$= \frac{2^{3k+2}}{2^{3k-2}} = 2^{(3k+2)-(3k-2)} = 2^4 = 16$$



گزینه ۴

در گزینه ۱ و ۲ عبارت $(-1)^x$ باعث یکی در میان، منفی شدن است که درست نیست.

با قرار دادن $x=1, 2, 3, \dots$ ، گزینه ۴ جواب سؤال است.

$$\frac{x(x+1)}{2} \times x^2 \mid x \in \mathbb{N} = \{-1, -4, +9, +16, -25, \dots\}$$

نکته: $\frac{x(x+1)}{2} (-1)$ باعث ۲ تا منفی، ۲ تا مثبت شدن اعضای مجموعه می‌شود.



گزینه ۵

باید ببینیم ۷۲ بر کدام مجذور کامل‌ها بخش پذیر است.

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{72}{x^2} \in \mathbb{N}\}$$



$$\frac{(n+2)(n+2-1)(n+2-2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{(n+2)(n+1)(n)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 15 \times n \xrightarrow{\div n} \frac{(n+1)(n+2)}{6} = 15$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2) = 90$$

ضرب دو عدد متوالی ۹۰ شده است (۹۰ = ۹ × ۱۰) لذا:

$$\frac{(n+1)(n+2)=90}{(8+1)(8+2)=90} \rightarrow n=8$$

روش دوم با توجه به $x \leq 0$ حاصل $3x + 40$ باید یکی از مجذور کامل‌های

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ و ۳۶ باشد که شش معادله با شش جواب مختلف می‌دهد.



گزینه ۳

n = تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی از مجموعه n عضوی

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه $n+2$ عضوی برابر است با:



یادداشت

مبحث دهم

..... اعمال مجموعه‌ها

اشتراک مجموعه‌ها

برای نمایش قسمت (اعضای) مشترک بین مجموعه‌های A و B از نماد $A \cap B$ یا $B \cap A$ استفاده می‌کنیم.

اگر $A = \{۷, ۵, ۱۱\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵\}$ و $C = \{۷, ۱۱\}$ باشند، داریم:

$$A \cap B = \{۵\}$$

$$A \cap C = \{۷, ۱۱\}$$

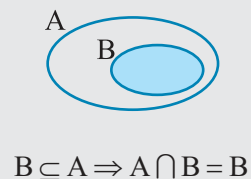
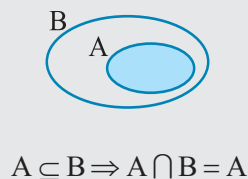
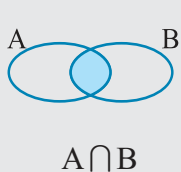
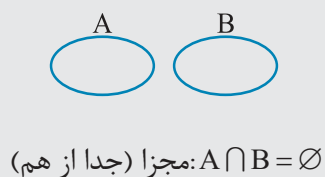
$$B \cap C = \{\}$$

$$A \cap B \cap C = \{\}$$

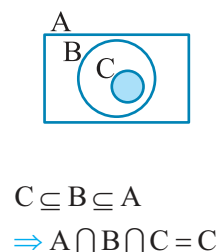
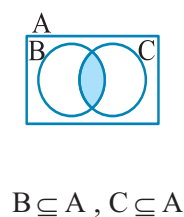
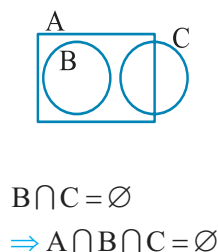
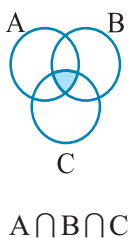
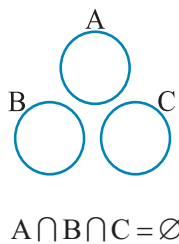
برای رنگ کردن ناحیه $A \cap B$ در نمودار ون، فرض می‌کنیم A را سیاه و B را آبی نموده‌ایم. ناحیه‌ای که دوبار رنگ شود (سیاه و آبی)، ناحیه $A \cap B$ است.



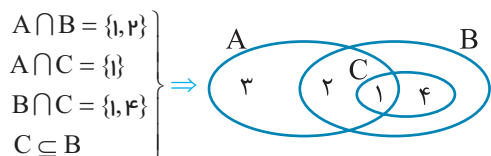
دو مجموعه نسبت به میزان اشتراکشان ۴ وضعیت می‌توانند داشته باشند:



ناحیه $A \cap B \cap C$ را رنگ کنید.



با توجه به $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲, ۴\}$ و $C = \{۱, ۴\}$ وضع سه مجموعه را با نمودار ون نمایش دهید.





اجتماع مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعه A و B شامل همهٔ اعضای هر دو مجموعه می‌باشد و آن را با $A \cup B$ یا $B \cup A$ نمایش می‌دهیم.

مثال اگر $A = \{7, 5, 11\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{7, 11\}$ باشد، داریم:

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 11\} \quad \text{و} \quad A \cup C = \{7, 5, 11\} = A$$

$$B \cup C = \{3, 4, 5, 7, 11\} \quad \text{و} \quad A \cup B \cup C = \{3, 4, 5, 7, 11\}$$

برای رنگ کردن اجتماع دو یا چند مجموعه $(A \cup B)$ ، همه را کاملاً رنگ می‌کنیم.



$$A \cup B$$



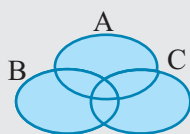
$$A \cup B$$



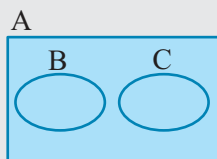
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$



$$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$$



$$A \cup B \cup C$$



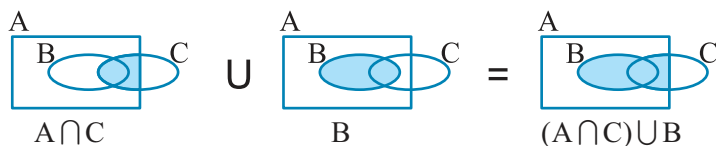
$$\left. \begin{array}{l} B \subseteq A \\ C \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B \cup C = A$$



$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \cup C = C$$



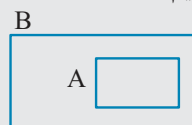
در نمودار مقابل، ناحیهٔ $(A \cap C) \cup B$ را رنگ کنید.



پاسخ:



اگر $A \subseteq B$ باشد، خواهیم داشت:



$$A \cap B = A \quad \text{مجموعه کوچکتر:}$$

$$A \cup B = B \quad \text{مجموعه بزرگتر:}$$

$$(N \cap Q) \cup (Q \cup Z) = N \cup Q = Q$$

با توجه به اینکه $N \subseteq Z \subseteq Q$ داریم:

مثال اگر $A_n = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, n < x < n+10\}$ باشد، $\bigcup_{n=3}^6 A_n$ و $\bigcap_{n=3}^6 A_n$ را بیابید.



نماد $\bigcap_{i=1}^n A_i$ یعنی اشتراک مجموعه‌های A_1 تا A_n : $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
و نماد $\bigcup_{i=1}^n A_i$ یعنی اجتماع مجموعه‌های A_1 تا A_n : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$$\begin{cases} A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3 < x < 3+10\} = \{4, 5, 6, \dots, 12\} \\ A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 4 < x < 4+10\} = \{5, 6, 7, \dots, 13\} \\ A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5 < x < 5+10\} = \{6, 7, 8, \dots, 14\} \\ A_6 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 6 < x < 6+10\} = \{7, 8, 9, \dots, 15\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bigcup_{n=3}^6 A_n = A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ \bigcup_{n=3}^6 A_n = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = \{4, 5, 6, \dots, 15\} \end{cases}$$

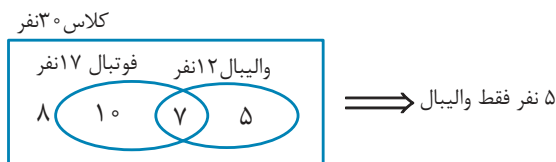
پاسخ:

$$n(A \cup B), n(A \cap B)$$

مثال در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۷ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال ثبت نام کرده اند، ۸ نفر نیز در هیچ تیمی ثبت نام نکرده اند. چند نفر فقط در والیبال ثبت نام کرده اند؟



پاسخ: روش اول ۲۲ = ۳۰ - ۸ نفر ثبت نام کرده اند، ولی مجموع ثبت نام فوتبال و والیبال ۱۷ + ۱۲ = ۲۹ نفر است، یعنی ۲۹ - ۲۲ = ۷ نفر مشترکاً در هر دو ثبت نام کرده اند.



$$\begin{cases} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} F: \text{فوتبال} \\ V: \text{والیبال} \end{array} \right\} \Rightarrow n(F \cap V) = n(F) + n(V) - n(F \cup V)$$

روش دوم

$$12 - 7 = 5 = \text{مشترک} - \text{والیبال} = \text{فقط والیبال} \Rightarrow 17 + 12 - (30 - 8) = 7$$

مثال مجموعه های A و B و C به ترتیب ۱۶ و ۱۴ و ۱۱ و مجموعاً ۲۷ عضو دارند و مجموعه های A ∩ B و A ∩ C و B ∩ C به ترتیب ۵ و ۶ و ۵ عضو دارند. تعداد عضوهایی که در هر سه مجموعه مشترک اند را بیابید.



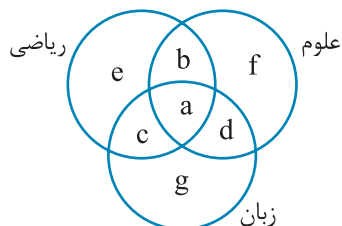
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



$$27 = 16 + 14 + 11 - 5 - 6 - 5 + n(A \cap B \cap C) \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 2$$

پاسخ:

مثال در یک کلاس ۲۵ نفری، آمار کسانی که در دروس ریاضی، علوم و زبان نمره بالای ۱۸ گرفته اند، به این صورت است: ۵ نفر در ریاضی و زبان، ۵ نفر فقط در زبان، ۹ نفر در ریاضی، ۲ نفر در هر سه درس، ۴ نفر فقط در علوم و ۱۱ نفر در زبان. چند نفر در هیچ یک از این سه درس نمره بالای ۱۸ نگرفته اند؟



$$a = 2: \text{مشترک در هر سه}$$

$$f = 4: \text{فقط علوم}$$

$$g = 5: \text{فقط زبان}$$

$$a + c = 5 \xrightarrow{a=2} c = 3: \text{مشترک ریاضی و زبان}$$

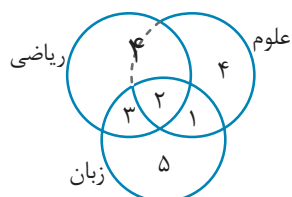
$$a + c + g + d = 11 \xrightarrow{\substack{a=2, c=3 \\ g=5}} d = 1: \text{زبان}$$

$$a + c + b + e = 9 \xrightarrow{\substack{a=2 \\ c=3}} b + e = 4: \text{ریاضی}$$

$$\text{نفر ۱۹} = 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 5$$

کلاس ۲۵ نفری بود پس ۲۵ - ۱۹ = ۶ نفر در هیچ یک از این دروس بالای ۱۸ نگرفته اند.

پاسخ:





تفاضل مجموعه‌ها

اگر از مجموعه A ، عضوهای مشترکش با B را کنار بگذاریم، مجموعه $A - B$ و اگر از B عضوهای مشترکش با A را کنار بگذاریم، اعضای $B - A$ به دست می‌آید.



اگر $A = \{۷, ۵, ۱۱\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵\}$ و $C = \{۷, ۱۱\}$ باشند، داریم:

$$A - B = \{۷, ۵, ۱۱\} - \{۳, ۴, ۵\} = \{۷, ۱۱\}$$

$$B - A = \{۳, ۴, ۵\} - \{۷, ۵, ۱۱\} = \{۳, ۴\}$$

$$C - A = \{۷, ۱۱\} - \{۷, ۵, ۱۱\} = \{\}$$

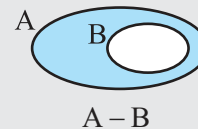
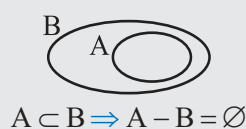
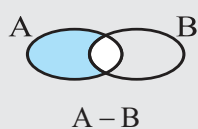
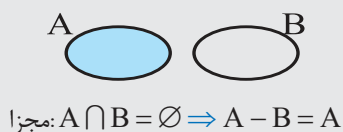
$$B - C = \{۳, ۴, ۵\} - \{۷, ۱۱\} = \{۳, ۴, ۵\}$$

$$A - (B \cup C) = \{۷, ۵, ۱۱\} - \{۳, ۴, ۵, ۷, ۱۱\} = \{\}$$

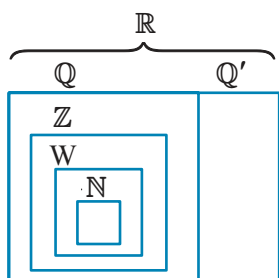
اعضای مشترک از اولی حذف می‌شود و آنچه می‌ماند جواب تفاضل است.



برای رنگ کردن ناحیه $A - B$ ، ناحیه A را کاملاً رنگ و سپس رنگ‌هایی که در ناحیه B قرار گرفته را پاک و حذف می‌کنیم.



برای مجموعه‌های عددی معروف داریم:



$$Q \cap Q' = \{\}, Q \cup Q' = \mathbb{R}, \mathbb{R} - Q = Q'$$

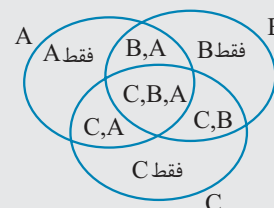
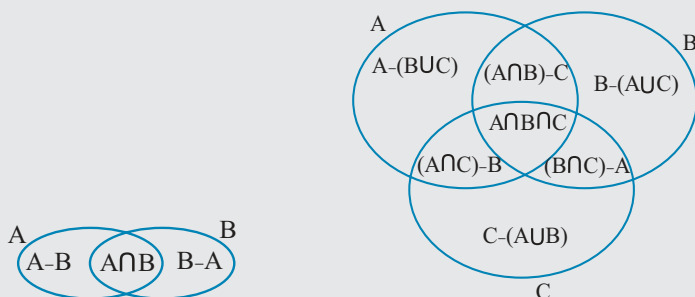
$$\mathbb{R} - Q' = Q, \mathbb{N} - Q = \{\}, W - N = \{0\}$$

$$W - Q' = W, Z - W = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

$$(\mathbb{R} - Q) - Z = Q' - Z = Q'$$



با نماد ریاضی ناحیه‌های مختلف آشنا شوید:



حاصل $B \cup (A \cap B) \cup [(B - A) - (A - B)]$ چیست؟

$$(B - A) - (A - B) = B - A$$

پاسخ: ناحیه $B - A$ و $A - B$ با هم اشتراکی ندارند، لذا:



تفاضل متقارن

کل به جز اشتراک را تفاضل (دلتا: Δ) متقارن گوئیم که به دو صورت قابل یافتن است:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{یا} \quad A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

دلتا

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ باشد، آن گاه:

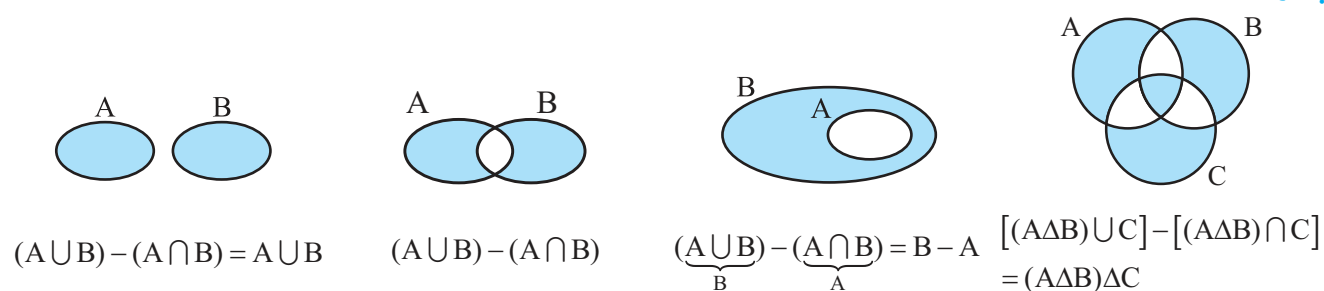


$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 6\} - \{2\} = \{1, 3, 4, 6\} \quad \text{یا} \quad A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\} \cup \{4, 6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

ناحیه تفاضل متقارن را رنگ کنید.



پاسخ:



اجتماع، اشتراک و تفاضل متقارن، خاصیت جابه جایی دارند ولی تفاضل این طور نیست (مگر آنکه $A = B$).

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \Delta B = B \Delta A$$

$$A - B \neq B - A$$

$$(A - B = B - A \leftrightarrow A = B)$$

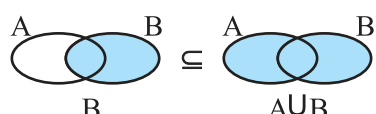
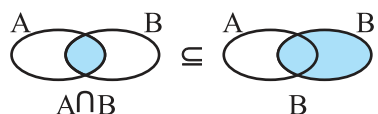
به خلاصه چندین نکته فارسی که به شکل جبری آمده دقت کنید:

① $A \cup A = A \cap A = A \cup \emptyset = A - \emptyset = A \Delta \emptyset = A$

② $A - A = A \cap \emptyset = \emptyset - A = A \Delta A = \emptyset$

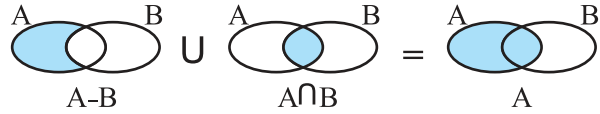
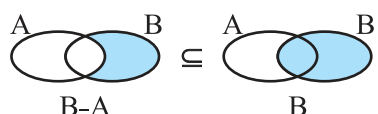
③ $(A \cap B) \subseteq A$ و $(A \cap B) \subseteq B$

④ $A \subseteq (A \cup B)$ و $B \subseteq (A \cup B)$



⑤ $(A - B) \subseteq A$ و $(B - A) \subseteq B$

⑥ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ و $n(A - B) + n(A \cap B) = n(A)$

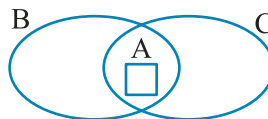


⑦ $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

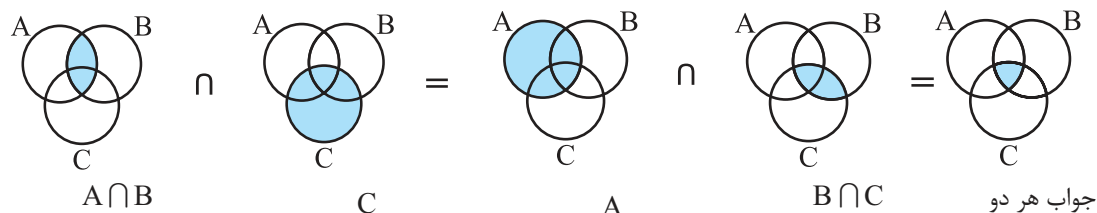


۸) $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ و $B = \emptyset$

۹) $\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$

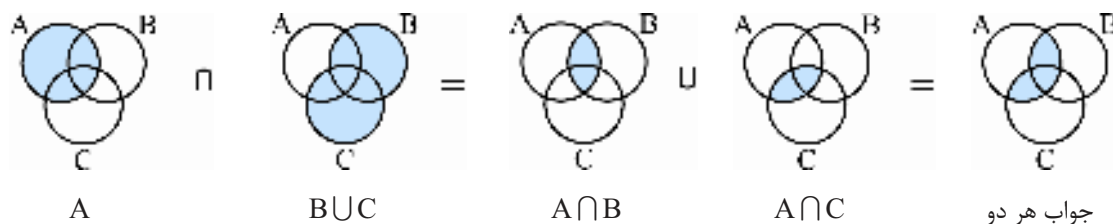


۱۰) خاصیت شرکت پذیری: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

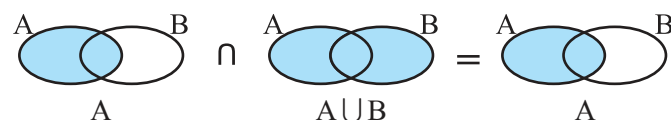


۱۱) خاصیت پخش (توزیع پذیری): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



۱۲) قانون جذب: $A \cap (A \cup B) = A$ و $A \cup (A \cap B) = A$

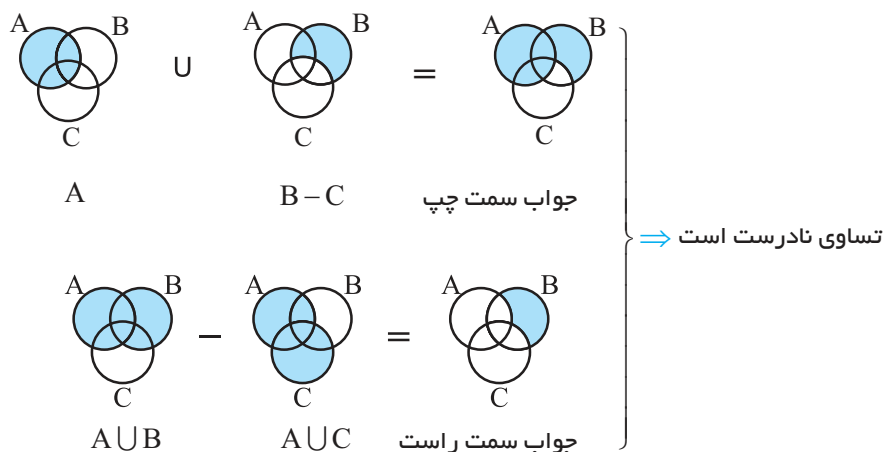


درستی یا نادرستی تساوی‌های زیر را با نمودار و ن مشخص کنید.



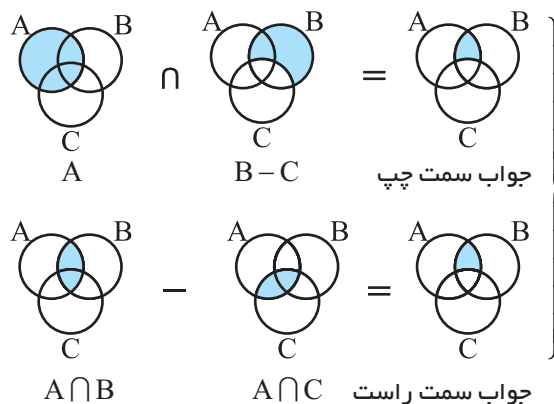
پاسخ:

الف) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$



پاسخ:

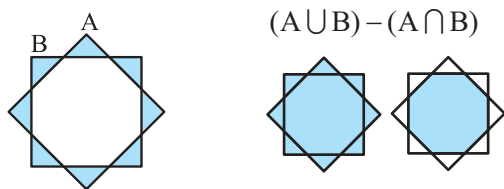
ب $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$



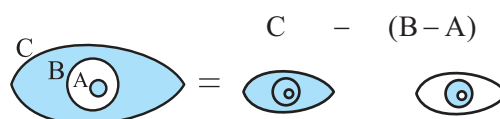
ناحیه موردنظر را رنگ کنید.



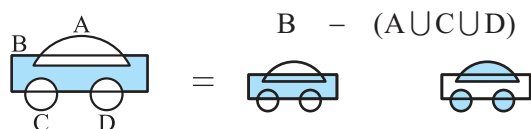
الف $A \Delta B$



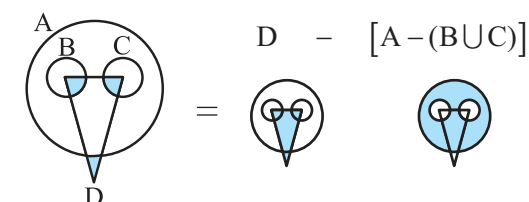
ب $C - (B - A)$



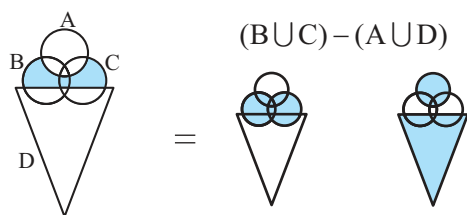
ج $B - (A \cup C \cup D)$



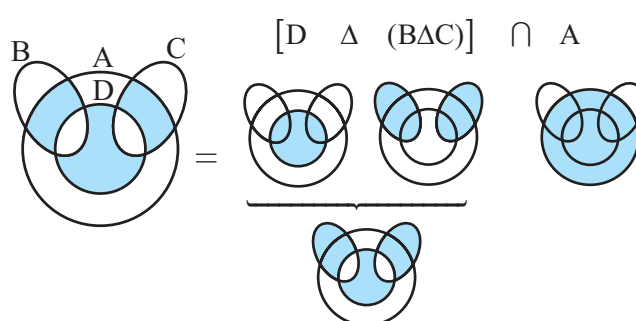
د $D - [A - (B \cup C)]$



ه $(B \cup C) - (A \cup D)$

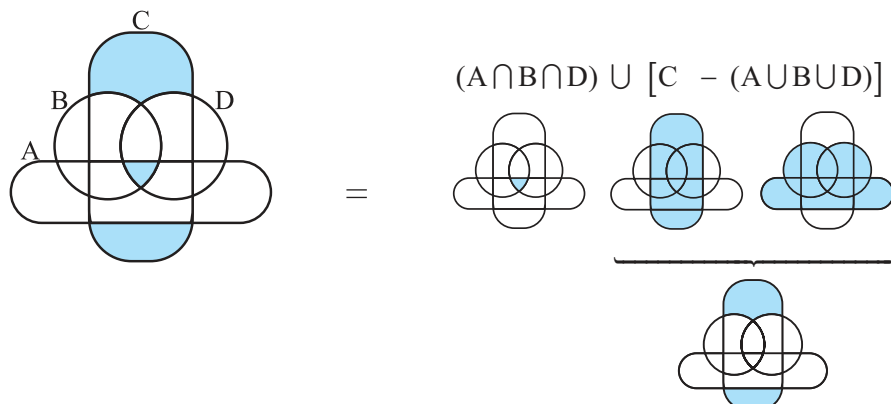


و $[D \Delta (B \Delta C)] \cap A$





$$(A \cap B \cap D) \cup [C - (A \cup B \cup D)]$$



نماد ریاضی قسمت رنگ شده و نیز نماد ریاضی قسمت $\times$ خورده را بنویسید.

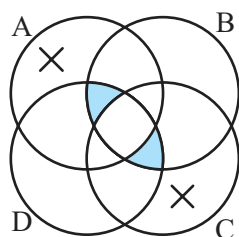


پاسخ: در قسمت رنگ شده، از ناحیه مشترک بین دایره های B و D یعنی $B \cap D$ ، قسمت مشترک بین C و A یعنی $A \cap C$ حذف شده است. پس می نویسیم:

$$(B \cap D) - (A \cap C)$$

در قسمت $\times$ خورده، گویی کل دایره های A و C را رنگ کرده $(A \cup C)$ و سپس کل ناحیه مربوط به B و D را حذف نموده است $(- (B \cup D))$ پس می نویسیم:

$$(A \cup C) - (B \cup D)$$

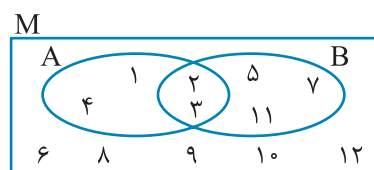
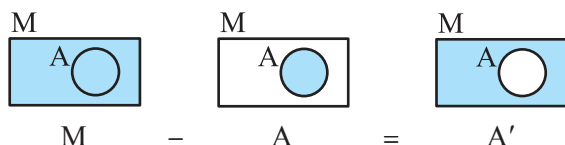


مجموعه مربع (بهانی، مادر)

در ریاضی، در هر مبحثی، می توان یک مجموعه را به عنوان مجموعه اصلی و مرجع در نظر گرفت که سایر مجموعه های مورد بحث و مطالعه را شامل می شود. معمولاً این مجموعه را با M (و گاهی با حرف U) نشان می دهند. به عنوان مثال در ریاضی هشتم، فصل عددهای اول، عددهای غیر طبیعی مورد بحث نبود و مجموعه اعداد طبیعی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر داشتیم (در آن جا $M = \mathbb{N}$).

مجموعه متمم

با تعریف مجموعه مرجع، می توان متمم هر مجموعه را مشخص کرد. متمم A که معمولاً با A' نشان داده می شود، شامل عضوایی از M (مجموعه مرجع) است که در A نباشند. $(M - A = A')$



با توجه به $M = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ و $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ داریم:

$$A' = M - A = \{5, 6, 7, \dots, 12\} \quad \text{و} \quad B' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$





با فرض مرجع بودن M ، برای هر مجموعه دلخواه A و B داریم:

① $A \cup M = M$

② $A \cup A' = M$

③ $A \cap A' = \emptyset \Rightarrow A - A' = A \text{ و } A' - A = A'$

④ $\emptyset' = M$

⑤ $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

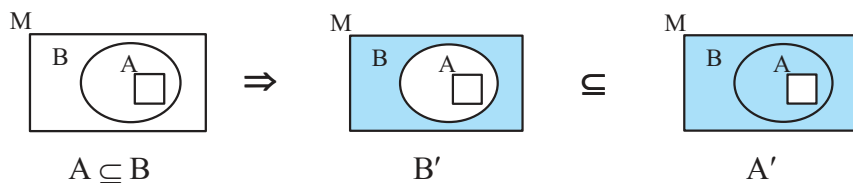
⑥ $A \cap M = A$

⑦ $M - A = A' \text{ و } M - A' = A$

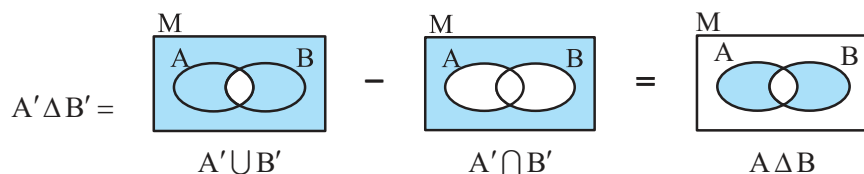
⑧ $M' = \emptyset$

⑨ $(A')' = A$: متمم متمم

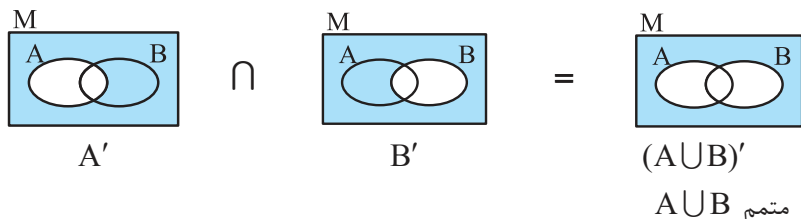
⑩ $A \subseteq B \xleftrightarrow{M} B' \subseteq A'$



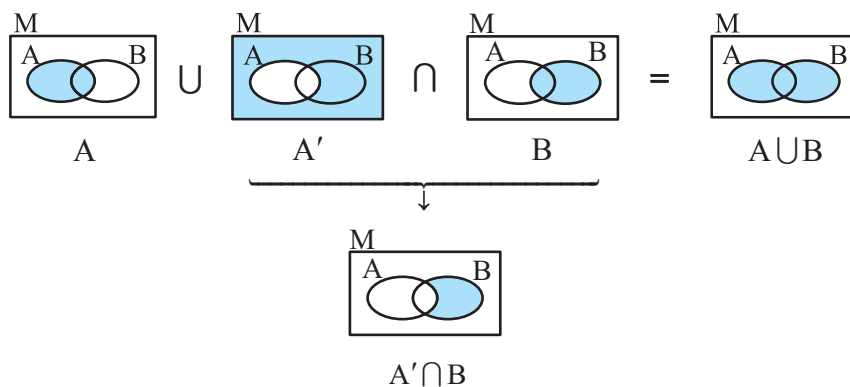
⑪ $A' \Delta B' = A \Delta B$



⑫ قانون دمورگان: $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$



⑬ قانون شبه جذب: $\begin{cases} A \cap (A' \cup B) = A \cap B \\ A \cup (A' \cap B) = A \cup B \end{cases}$

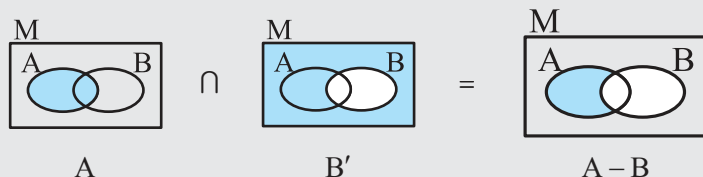




اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ و $C = \{3, 4\}$ باشد، حاصل $[A' \cup (B \cap C)']'$ را بیابید.



$A - B = A \cap B'$ یعنی: $A - B$ برابر است با اشتراک A با هر چه غیر از B .



پاسخ: شاید در نظر اول بگویید با توجه به علامت‌های متهم، باید مجموعه مرجع نیز معرفی می‌شد، ولی با توجه به نکته داریم:

$$[A' \cup (B \cap C)']' \xrightarrow{\text{نکته ۱۱}} [A' \cup (B - C)]' \xrightarrow{\text{قانون دمورگان}} A \cap (B - C)' \xrightarrow{\text{نکته ۱۱}} A - (B - C)$$

$$A - (B - C) = \{1, 2\} - [\{2, 3\} - \{3, 4\}] = \{1, 2\} - \{2\} = \{1\}$$





تست های مبتدیان



۱. با توجه به مجموعه های A و B ، $A \cap B$ در کدام گزینه آمده است؟

$$A = \{x-1 \mid x \in \mathbb{N}, 2x < 20\}, \quad B = \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}, 3x < 20\}$$

B (۴)

A (۳)

$\{1, 2, \dots, 7\}$ (۲)

$\{1, 2, \dots, 8\}$ (۱)

۲. برای سه مجموعه A و B و C به طوری که $A \subseteq B \subseteq C$ ، حاصل $A - (B \cap C)$ در کدام گزینه آمده است؟

$B - A$ (۴)

$(A \cup B)$ (۳)

A (۲)

$\emptyset$ (۱)

۳. با توجه به سه مجموعه A و B و C که در زیر آمده است، $(A \cup B) \cap C$ در کدام گزینه آمده است؟

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{2, 3, 6\}$$

$\{1, 2, 3\}$ (۴)

$\{2, 3, 6\}$ (۳)

$\{2, 3\}$ (۲)

$\{3\}$ (۱)

۴. در یک کلاس ۵۰ نفری، ۲۴ نفر ورزش نمی کنند و ۱۸ نفر موسیقی کار نمی کنند. اگر ۷ نفر نه ورزش کنند و نه موسیقی کار کنند، چند نفر هم ورزش می کنند و هم موسیقی کار می کنند؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

۵. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ باشند، چند مجموعه مانند X وجود دارد که در رابطه $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ صدق می کند؟

۲۳ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۶. ساده شده عبارت $A - [(A \cap B) \cup A]$ در کدام گزینه آمده است؟

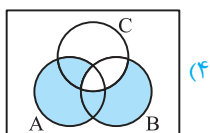
$A \cap B$ (۴)

$B - A$ (۳)

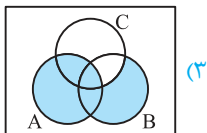
$A - B$ (۲)

$\emptyset$ (۱)

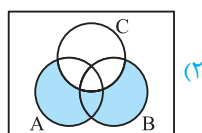
۷. کدام نمودار، قسمت رنگ شده مجموعه $(A - B) \cup (B - C)$ را درست نشان می دهد؟



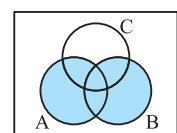
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۸. اگر $A_i = \{m \mid m \in \mathbb{Z}, i \leq m \leq 8-i\}$ باشد، مجموعه $\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i$ چند عضو دارد؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

صفر (۱)

۹. در بین اعداد ۱ تا ۳۰۰، چند عدد وجود دارد که بر هیچ کدام از سه عدد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر نباشد؟

۱۰۰ (۴)

۹۰ (۳)

۸۰ (۲)

۱۰ (۱)

۱۰. ساده شده عبارت $[A \cup B' \cup C'] \cap [A \cup (B \cap C)]$ در کدام گزینه آمده است؟

$A \cup B \cup C$ (۴)

$A \cup (B \cap C)$ (۳)

A (۲)

$\emptyset$ (۱)



پاسخ‌نامه تشریحی و آموزشی تست‌های مبتدیان



گزینه ۲

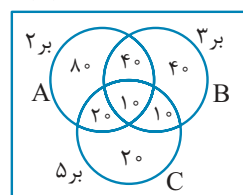
$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq m \leq 8-1 \\ A_1 = \{1, 2, \dots, 7\} \\ 2 \leq m \leq 8-2 \\ A_2 = \{2, 3, \dots, 6\} \\ 3 \leq m \leq 8-3 \\ A_3 = \{3, 4, 5\} \\ 4 \leq m \leq 8-4 \\ A_4 = \{4\} \\ A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^8 A_i = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$$

$$\bigcap_{i=1}^8 A_i = \emptyset$$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i = \{1, 2, \dots, 7\} \Rightarrow$ عضو دارد ۷



گزینه ۹



$$2 \text{ بر } n(A) = \frac{300}{2} = 150$$

$$3 \text{ بر } n(B) = \frac{300}{3} = 100$$

$$5 \text{ بر } n(C) = \frac{300}{5} = 60$$

$$6 \text{ بر } n(A \cap B) = \frac{300}{6} = 50 \quad 10 \text{ بر } n(A \cap C) = \frac{300}{10} = 30$$

$$30 \text{ بر } n(A \cap B \cap C) = \frac{300}{30} = 10$$

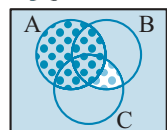
$$15 \text{ بر } n(B \cap C) = \frac{300}{15} = 20$$

$$n(A \cup B \cup C) = 220 \Rightarrow \text{با توجه به نمودار}$$

$$\Rightarrow \text{بر هیچ کدام } 300 - 220 = 80$$



گزینه ۲



$$\underbrace{[A \cup B' \cup C']}_{\text{رنگی}} \cap \underbrace{[A \cup (B \cap C)]}_{\text{نقطه چین}} = A$$

روش اول

روش دوم

با استفاده از قوانین مجموعه‌ها هم بررسی می‌کنیم:

$$\text{قانون دمورگان: } B' \cup C' = (B \cap C)'$$

$$\Rightarrow [A \cup (B \cap C)'] \cap [A \cup (B \cap C)]$$

$$= A \cup [\underbrace{(B \cap C)' \cap (B \cap C)}_{\emptyset}] = A \cup \emptyset = A$$

(چون اشتراک هر مجموعه با متممش، تهی است)



گزینه ۴

$$2x < 20 \Rightarrow x < \frac{20}{2} \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$\Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$3x < 20 \Rightarrow x < \frac{20}{3} \simeq 6.7 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\Rightarrow B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = B$$



گزینه ۲

از روی نمودار ون هم می‌توان به موارد زیر دست یافت.

$$B \subseteq C \Rightarrow (B \cap C) = B$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$$



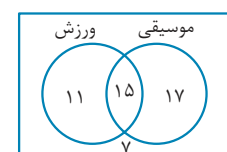
گزینه ۳

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 6\} = \{2, 3\}$$



گزینه ۴



$$26 - 24 = 50: \text{اهل ورزش}$$

$$32 - 18 = 50: \text{اهل موسیقی}$$

$$43 - 7 = 50: \text{اهل موسیقی یا ورزش هستند}$$

$$15 = 26 + 32 - 43: \text{موسیقی} \cap \text{ورزش}$$



گزینه ۵

$$\{2, 4, 6\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

پس اعضای ۲ و ۴ باید درون مجموعه X باشند. در نتیجه با اعضای ۱، ۳، ۵

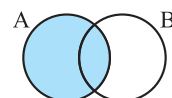
و ۸ زیرمجموعه‌ها را می‌نویسیم ($2^4 = 16$ زیرمجموعه) سپس آن سه عضو را

داخل هر زیرمجموعه قرار می‌دهیم.



گزینه ۱

از روی نمودار ون می‌توان دید.

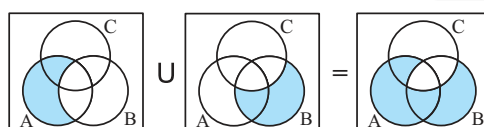


$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) \cup A = A$$

$$A - [(A \cap B) \cup A] = A - A = \emptyset$$



گزینه ۷



مبحث سوم

..... احتمال

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$

با این فرمول در سال‌های گذشته آشنا شدیم. در این مبحث سه مفهوم فضای نمونه‌ای، پیشامد و اصل ضرب مطرح می‌شوند که به ذکر آن‌ها می‌پردازیم:

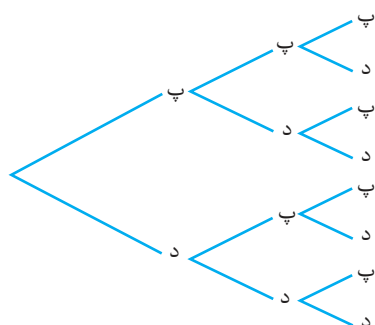
فضای نمونه‌ای

مجموعه‌ای است شامل همه حالات و انتخاب‌های ممکن که معمولاً آن را با S نشان می‌دهند.

فضای نمونه‌ای جنسیت سه فرزند یک خانواده را بنویسید.



پاسخ:

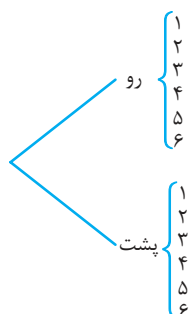


$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\} \Rightarrow n(S) = 8$$

یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم. همه حالات ممکن را بنویسید.



پاسخ:



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 12$$

پیشامد

به هریک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای (S) یک پیشامد گوئیم.

مثلاً برای فضای نمونه‌ای مثال (۲) می‌توان، $2^{12} = 4096$ پیشامد نوشت.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} \Rightarrow \text{احتمال پیشامد } A = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

نتیجه:

همواره داریم $0 \leq P(A) \leq 1$. پیشامدی که احتمالش صفر باشد را غیر ممکن و پیشامدی که احتمالش ۱ باشد را حتمی می‌گوییم.



در انداختن یک تاس، آمدن عددی دو رقمی را غیر ممکن و آمدن یکی از شماره‌های عدد ۶۰ را حتمی می‌گوییم.



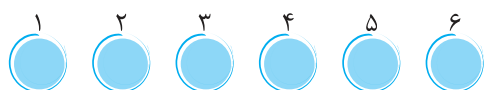


اصل ضرب (شمارش)

انتخاب دو عضو که اولی از یک مجموعه a عضوی و دومی از یک مجموعه b عضوی انتخاب شود، به $a \times b$ صورت قابل انجام است.

مثال ۴: سه تیم تنیس روی میز داریم: تیم A پنج نفر، تیم B سه نفر و تیم C شش نفری است. قرار است همه اعضای هر تیم با همه اعضای دو تیم دیگر مسابقه دهند. چند بازی انجام خواهد شد؟

پاسخ: مسابقه بین دو نفر از تیم‌های A و B یا تیم‌های A و C یا تیم‌های B و C می‌باشد.
مجموعاً ۶۳ بازی انجام خواهد شد. $15 + 30 + 18 = 63 \Rightarrow 5 \times 3 = 15, 5 \times 6 = 30, 3 \times 6 = 18$



حروف A و B و C و D و E و F را به چند ترتیب می‌توان کنار هم قرار داد؟

پاسخ: روش اول حروف را در خانه‌های ۱ تا ۶ قرار می‌دهیم:

برای خانه اول ۶ انتخاب داریم که یکی از حروف را در آن قرار می‌دهیم. برای خانه دوم چون قبلاً یک حرف نوشته شده، ۵ انتخاب باقی می‌ماند که یکی را قرار می‌دهیم. به همین ترتیب برای خانه سوم، ۴ انتخاب، برای خانه چهارم ۳ انتخاب، برای خانه پنجم ۲ انتخاب و برای خانه آخر یک حرف باقی می‌ماند. این انتخاب‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$



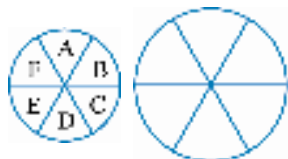
تعداد حالت‌هایی (جایگشت‌هایی) که می‌توان n شیء را کنار هم قرار داد برابر است با:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad (\text{ان فاکتوریل})$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

روش دوم طبق نکته:

۶ رنگ متفاوت داریم. به چند ترتیب می‌توان شش قطعه بشقاب زیر را رنگ نمود؟



پاسخ: تفاوت این مثال با مثال بالا در این است که عضو اول و آخر وجود ندارد. لذا ترتیب رنگ‌های بشقاب مقابل را به ۶ بیان تکراری می‌توان نام برد:

ABCDEF و BCDEFA و CDEFAB و DEFABC و EFABCD و FABCDE

پس اگر هر ۶ عضو تکراری را یکی در نظر بگیریم، تعداد چینش‌ها را به $5! = \frac{6!}{6}$ مدل $(n-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)$ می‌توان نام برد که تکراری نباشند:

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

نتیجه: در جایگشت دوری یا دایره‌ای n شیئی، $(n-1)!$ حالت ایجاد می‌شود.



مثال ۷: در انداختن سه تاس، احتمال آن را بیابید که:

الف) اولی مرکب و سومی غیراول باشد.

پاسخ: روش اول

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{اولی} \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{دومی} \\ \hline 6 \text{ تا } 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{سومی} \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \frac{2 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

$$2 \times 6 \times 3 = 36 \Rightarrow P(\text{الف}) = \frac{n(\text{الف})}{n(S)} = \frac{2 \times 6 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \frac{2 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

روش دوم این که دومی چه بیاید مهم نیست پس آن را کنار می‌گذاریم. انگار فقط دو تاس داریم:

شمارنده ۱۲ مضرب ۵ زوج

۱		
۲		۲
۳		۳
۴		۴
۵	۵	۵
۶		۶

$$۳ \times ۱ \times ۵ = ۱۵$$

ب) یکی از آن‌ها زوج، یکی مضرب ۵ و دیگری شمارنده ۱۲ شود.

پاسخ: مشخص نکرده، کدام زوج، کدام مضرب ۵ و کدام شمارنده ۱۲ باشد.

مضرب، شمارنده و زوج بودن را به $۳! = ۶$ مدل می‌توان چینش کرد:

۶ چینش، هر چینش ۱۵ حالت $\Rightarrow \dots$ یا مضرب زوج شمارنده مضرب زوج یا شمارنده مضرب زوج

اما بعضی از این چینش‌ها، حالت تکراری دارند. به عنوان مثال دو چینش

$$\{(۲, ۲), (۲, ۴), \dots, (۶, ۵)\}$$

زیر ۹ حالت تکراری دارند که به صورت زیر است:

شمارنده ۱۲	مضرب ۵	زوج
زوج	مضرب ۵	شمارنده ۱۲

۶ چینش مختلف به صورت ۲ به ۲ حالت تکراری دارند که در نهایت $۹ \times ۳ = ۲۷$ حالت تکراری به وجود می‌آید.

$$\Rightarrow n(\text{ب}) = ۶ \times ۱۵ - ۹ \times ۳ = ۹۰ - ۲۷ = ۶۳ \Rightarrow P(\text{ب}) = \frac{n(\text{ب})}{n(S)} = \frac{۶۳}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۷}{۲۴}$$

ج) مجموعه‌شان حداقل ۱۶ شود.

پاسخ: حداقل ۱۶ یعنی از ۱۶ کمتر نشود، پس مجموعه‌شان باید ۱۶ یا ۱۷ یا ۱۸ شود (بیش از ۱۸ ممکن نیست).

$$\overbrace{\{(۴, ۶, ۶), (۶, ۴, ۶), (۶, ۶, ۴), (۵, ۵, ۶), (۵, ۶, ۵), (۶, ۵, ۵), (۵, ۶, ۶), (۶, ۵, ۶), (۶, ۶, ۵), (۶, ۶, ۶)\}}^{۱۶}_{۱۷} \Rightarrow n(\text{ج}) = ۱۰$$

$$P(\text{ج}) = \frac{n(\text{ج})}{n(S)} = \frac{۱۰}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۵}{۱۰۸}$$

اگر $n(A) = ۱۰$ ، $n(B) = ۸$ ، $n(A \cup B) = ۱۵$ و $n(S) = ۳۰$ باشد، $P(A \cap B)$ چند است؟

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cup B)}{۳۰} = \frac{۱۰ + ۸ - ۱۵}{۳۰} = \frac{۳}{۳۰} = ۰/۱$$

از میان اعداد ۴ رقمی یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد بخش‌پذیر بر ۲۰ و رقم‌هایش غیر تکراری باشد؟

یکان دهگان صدگان هزارگان
۹ تا ۰ ۹ تا ۰ ۹ تا ۰ ۹ تا ۱

$$۹۰۰۰ = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \text{ تعداد ۴ رقمی‌ها}$$

عددی بر ۲۰ بخش‌پذیر است که یکانش صفر و دهگانش زوج باشد. در یکان، صفر و در دهگان یکی از چهار رقم ۲، ۴، ۶ یا ۸ را می‌گذاریم.

$$۷ \times ۸ \times ۴ \times ۱ = ۲۲۴$$

تا اینجا ۲ رقم کنار رفت، پس برای صدگان ۸ تا انتخاب و برای هزارگان ۷ تا انتخاب داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۲۴}{۹۰۰۰}$$

در پرتاب ۴ سکه چقدر احتمال دارد که حداکثر ۳ سکه پشت بیایند؟

پیشامد متمم: پیشامدی که متمم A باشد، شامل همه حالت‌هایی است که در A نباشند و معمولاً آن را با A' نشان می‌دهیم و داریم:

$$A' = M - A \Rightarrow P(A') = ۱ - P(A)$$

پاسخ: حداکثر سه سکه پشت بیاید (۴ تا پشت قبول نیست)، یعنی همه حالت‌ها غیر از یک حالت.

$$A = \{(پ, پ, پ, پ)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲} = \frac{۱}{۱۶}$$

$$P(A') = ۱ - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

و چون ما متمم پیشامد A را می‌خواهیم، می‌نویسیم:



معمولاً در احتمال، کلمه «و» به معنای اشتراک ($\cap$) و کلمه «یا» به معنای اجتماع ($\cup$) می‌باشد.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\div n(S)} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهایی که اشتراکشان تهی است، یعنی امکان وقوع هم‌زمان ندارند را ناسازگار گوئیم و داریم:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) + 0$$

در انداختن یک تاس پیشامدهای «اول آمدن» و «زوج آمدن» ناسازگار نیستند، زیرا اشتراک آن‌ها {۲} است ولی پیشامدهای «زوج آمدن» و «فرد آمدن» ناسازگارند و احتمال وقوع هم‌زمان آن‌ها صفر است.



پیشامدهای مستقل: اگر رخداد پیشامد A، دخالت و تأثیری در رخ دادن پیشامد B نداشته باشد، این دو پیشامد را مستقل گوئیم و داریم:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل هستند} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

در پرتاب دو تاس پیشامدهای «حاصل ضربشان ۱۲ شود» و «اولی ۴ بیاید» به یکدیگر وابسته‌اند. زیرا وقوع هم‌زمان این دو پیشامد ایجاد می‌کند که «دومی ۳ بیاید» پس مستقل نیستند. ولی پیشامدهای «اولی عدد مرکب بیاید» و «دومی عدد زوج بیاید» از هم مستقل بوده و مرکب آمدن اولی محدودیت و دخالتی در زوج شدن دومی ایجاد نمی‌کند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نتیجه: برای پیشامدهای ناسازگار داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

و برای پیشامدهای مستقل داریم:

مثال ۱۳ شماره‌های ۱ تا ۲۰ را به ترتیب روی ۲۰ گوی نوشته و در کیسه‌ای می‌ریزیم. یک گوی را به تصادف از کیسه برداشته، به کیسه برمی‌گردانیم و گوی دوم را برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد که:

الف) مجموعشان ۱۵ شود یا هر دو بیشتر از ۱۶ شوند.

پاسخ: «مجموعشان ۱۵ شود» را پیشامد A و «هر دو بیشتر از ۱۶ شوند» را پیشامد B بگیریم. مطلوب سؤال $P(A \cup B)$ است.

این دو پیشامد ناسازگارند و نمی‌توانند با هم رخ دهند، پس: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$A = \{(1, 14), (2, 13), (3, 12), \dots, (13, 2), (14, 1)\} \Rightarrow n(A) = 14$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{20 \times 20} = \frac{7}{200} = 0/035$$

$$\begin{array}{cc} \text{اولی} & \text{دومی} \\ 20 \text{ تا } 1 & 20 \text{ تا } 17 \\ 4 & \times \quad 4 \end{array} \Rightarrow n(B) = 16 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{16}{20 \times 20} = \frac{4}{100} = 0/04$$

$$\text{«یا» } P(A \cup B) \Rightarrow P(A) + P(B) = 0/035 + 0/04 = 0/075$$

ب) اولی مجذور کامل یا دومی عددی اول باشد.

پاسخ: مجذور کامل بودن اولی (A) تأثیری بر اول شدن یا نشدن دومی (B) ندارد. پس این دو مستقل هستند.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ از بین ۱ تا ۲۰ یکی از ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ بیاید.}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ از بین ۱ تا ۲۰ یکی از ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ بیاید.}$$

$$\text{«یا» } \Rightarrow P(A \cup B) \stackrel{\text{مستقل}}{=} P(A) + P(B) - (P(A) \times P(B)) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{13}{25}$$

احتمال سطح و حجم

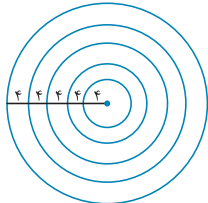


اگر سؤال احتمال، مربوط به انتخاب یک سطح یا حجم از کل باشد، معمولاً از رابطه $\frac{\text{حجم مطلوب}}{\text{حجم کل}}$ و $\frac{\text{مساحت مطلوب}}{\text{مساحت کل}}$ استفاده می‌کنیم.

در صفحه‌ای دایره‌ای به شعاع ۲۰ cm، پنج دایره هم‌مرکز، با اختلاف شعاع‌های ۴ cm ایجاد کرده‌ایم. اگر احتمال برخورد تیر به تمام نقاط این صفحه یکسان باشد، چند درصد احتمال دارد، تیری که به این صفحه می‌خورد، در یکی از دو حلقه آخر قرار گیرد؟



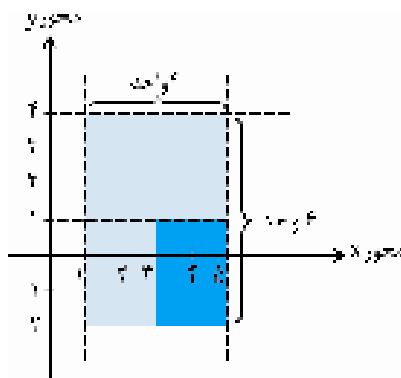
پاسخ:



$$S_{\text{دو حلقه آخر}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{دایره به شعاع ۱۲}} = \pi(20)^2 - \pi(12)^2 = 256\pi$$

$$\text{احتمال} = \frac{S_{\text{مطلوب}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{256\pi}{400\pi} = 0.64 \rightarrow 64\% \text{ احتمال دارد.}$$

چقدر احتمال دارد نقطه‌ای که از مجموعه $A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid 1 < x < 5, -2 < y < 4 \right\}$ انتخاب می‌کنیم، عضو مجموعه $B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x > 3, y < 1 \right\}$ باشد؟



پاسخ: مجموعه A نقاط داخل یک مستطیل است که ضلع‌هایش ستون‌های $1 < x < 5$ و $-2 < y < 4$ هستند.

از این مستطیل، $x > 3$ یعنی نقاط سمت راست خط $x = 3$ را و $y < 1$ یعنی نقاط پایین خط $y = 1$ را برمی‌گزینیم.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{مساحت مطلوب}}{\text{مساحت کل}} = \frac{2 \times 3}{4 \times 6} = \frac{1}{4}$$

مجید امروز کلاس ریاضی دارد. احتمال آنکه به کلاس برود $\frac{5}{10}$ ، استاد نیاید $\frac{7}{10}$ ، استاد امتحان بگیرد $\frac{4}{10}$ و احتمال قبول نشدن مجید $\frac{4}{10}$ است. چقدر احتمال دارد که مجید در امتحان ریاضی امروز قبول شود؟



پاسخ:

قبول شود = امتحان بگیرد $\times$ استاد بیاید $\times$ مجید برود = احتمال قبولی امروز

$$= \frac{5}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{36}{1000} = 0.036$$

به ۴ نفر گفته‌ایم عدد حسابی دلخواهی کمتر از ۲۰ را در نظر بگیرند. چقدر احتمال دارد که:



الف) همه عدد ۱ را در نظر گرفته باشند.

نفر چهارم: ۱ تا ۱۹
نفر سوم: ۱۹ تا ۳۸
نفر دوم: ۳۸ تا ۵۷
نفر اول: ۵۷ تا ۷۶

تعداد کل حالات: $n(S) = 160000 \Rightarrow 20 \times 20 \times 20 \times 20$

$(1, 1, 1, 1)$

$$P(\text{الف}) = \frac{n(\text{الف})}{n(S)} = \frac{1}{160000}$$

ب) همگی عدد یکسانی را در نظر گرفته باشند.

پاسخ:

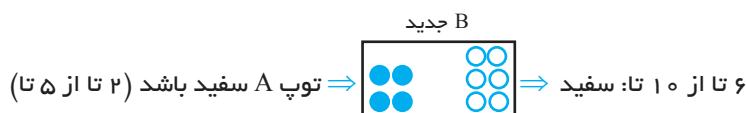
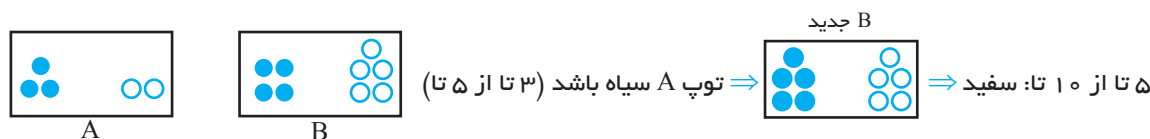
$$P(\text{ب}) = \frac{n(\text{ب})}{n(S)} = \frac{20}{160000} = \frac{1}{8000}$$



دو ظرف داریم. ظرف A شامل ۲ توپ سفید و ۳ توپ سیاه و ظرف B شامل ۵ توپ سفید و ۴ توپ سیاه است. از A به تصادف یک توپ برداشته و در ظرف B می‌گذاریم. حالا مهره‌ای به تصادف از ظرف B برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد این توپ سفید باشد.



پاسخ:



(B جدید سفید × A سفید) + (B جدید سیاه × A سیاه) = احتمال سفید بودن توپ نهایی

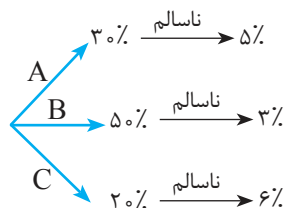
$$= \left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{10} \right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{6}{10} \right) = \frac{15}{50} + \frac{12}{50} = \frac{27}{50}$$

مسائل ترکیبی

سه کارخانه تولید لامپ داریم. احتمال ناسالم بودن لامپ تولیدی کارخانه A، ۵ درصد، کارخانه B، ۳ درصد و کارخانه C، ۶ درصد است. یک فروشگاه لوازم برقی ۳۰ درصد لامپ‌هایش را از کارخانه A، ۵۰ درصد لامپ‌هایش را از کارخانه B و بقیه را از کارخانه C تهیه کرده است. به نظر می‌رسد چند درصد لامپ‌های فروشگاه ناسالم باشد؟



پاسخ:



$$\text{احتمال ناسالم بودن} = \left(\frac{30}{100} \times \frac{5}{100} \right) + \left(\frac{50}{100} \times \frac{3}{100} \right) + \left(\frac{20}{100} \times \frac{6}{100} \right) = \frac{42}{10000} = 0.42\%$$

$$\text{درصد لامپ‌های ناسالم} : \frac{42}{10000} \times 100 = 0.42\%$$

تاسی را می‌اندازیم. اگر عدد اول بیاید، یک بار دیگر تاس را می‌اندازیم در غیر این صورت ۲ بار دیگر تاس را می‌اندازیم. چقدر احتمال دارد، مجموع اعداد رو شده، کمتر از ۵ باشد.



پاسخ:

باید مجموع دو تاس یا سه تاس انداخته شده، کمتر از ۵ باشد؛ یعنی حالت‌های:

A B C D E F
(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,2,1), (3,1,1)

احتمال A + احتمال B + ... + احتمال F

$$= \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) = 3 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) + 3 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{72} + \frac{1}{12} = \frac{7}{72}$$

در ظرفی ۵ توپ سیاه و ۶ توپ سفید داریم. اگر به‌طور تصادفی توپ‌ها را بدون دیدن رنگ آن‌ها یکی‌یکی خارج کنیم، چقدر احتمال دارد پنجمین توپ خارج‌شونده سیاه باشد؟



پاسخ:

با وجود اینکه رنگ قبلی در احتمال بعدی تأثیر دارد ولی در چنین سؤالاتی که نتایج قبلی نامعلوم است می‌توان احتمال توپ ششم و توپ اول را مساوی دانست.

$$\text{احتمال سیاه} = \frac{5}{11} \Rightarrow \text{توپ اول سیاه}$$



تستهای مبتدئ سوم



۱. در انداختن دو تاس، احتمال آن را بیابید که مجموع اعداد رو شده بیشتر از ۱۰ باشد؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴)

۲. احتمال اینکه در ۵ بار پرتاب سکه، حداقل یک بار «رو» بیاید، چقدر است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{29}{32}$ (۳) $\frac{31}{32}$ (۴)

۳. روی ۲۰۰ کارت، اعداد ۱ تا ۲۰۰ را نوشته ایم. یک کارت به تصادف رو می کنیم. چقدر احتمال دارد کارت رو شده مضرب ۲ باشد ولی

مضرب ۵ نباشد؟

$\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{9}{20}$ (۴)

۴. در انداختن سه تاس، احتمال آن را بیابید که یکی اول، یکی مرکب، دیگری نه اول و نه مرکب باشد؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{36}$ (۴)

۵. خانواده ای دارای ۴ فرزند می باشد. با کدام احتمال، این خانواده هم فرزند دختر و هم فرزند پسر دارد؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴)

۶. در کیسه ای ۵ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۳ مهره زرد وجود دارد. ۲ مهره به تصادف بیرون می آوریم. احتمال اینکه ۲ مهره هم رنگ باشند،

کدام است؟

$\frac{10}{66}$ (۱) $\frac{19}{66}$ (۲) $\frac{24}{66}$ (۳) $\frac{31}{66}$ (۴)

۷. اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را روی ۵ کارت یکسان نوشته ایم. به تصادف ۳ کارت را به صورت تک تک بیرون کشیده و در کنار هم قرار می دهیم.

با کدام احتمال، عدد سه رقمی ساخته شده، مضرب ۱۵ خواهد بود؟

$\frac{1}{20}$ (۱) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴)

۸. نقطه ای به طور تصادفی درون مربعی به ضلع ۲ سانتی متر انتخاب می کنیم. احتمال اینکه فاصله این نقطه از نزدیک ترین رأس مربع،

بزرگتر از ۱ باشد، چقدر است؟ ($\pi \simeq 3$)

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۹. از بین ۴ کارت سفید و ۵ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت را خارج می کنیم. سپس بدون جایگذاری کارت اول، کارت دوم را

خارج می کنیم. با کدام احتمال، هر دو کارت هم رنگ هستند؟

$\frac{2}{9}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴)

۱۰. سه نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند. به طوری که احتمال برد نفر اول، دو برابر احتمال برد نفر دوم و نصف احتمال برد نفر سوم است.

احتمال برد نفر سوم چقدر است؟

$\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)



پاسخ نامه تشریحی و آموزشی تست های مبتدئ سوم

۱ گزینه ۳



کل حالت های پرتاب دو تاس ۳۶ حالت است که در سه حالت آن، مجموع اعداد رو شده ۱۱ یا ۱۲ هستند.

$$(6,6) \text{ و } (5,6) \text{ و } (6,5) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۲ گزینه ۲



چون شمارش حالت هایی که سکه یک بار، دو بار، سه بار، ... رو بیاید زیاد است، از اصل متمم استفاده می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} 32 &= 2^5 = \text{تعداد کل حالات} \\ 1 &\text{ حالت: هیچ سکه ای رو نیاید} \end{aligned} \right\}$$

$$31 = 32 - 1 = \text{تعداد حالاتی که سکه حداقل یک بار رو بیاید}$$

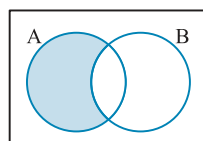
$$\Rightarrow P(A) = \frac{31}{32}$$

۳ گزینه ۲



تعداد اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند: $n(A) = \frac{200}{2} = 100$
تعداد اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیرند:

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= \frac{200}{10} = 20 \\ \Rightarrow n(A \text{ فقط}) &= 100 - 20 = 80 \\ \Rightarrow P(A \text{ فقط}) &= \frac{80}{200} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$



۴ گزینه ۱



«اول»، «مرکب» و «نه اول و نه مرکب» بودن را به ۶ ترتیب می توان در نظر گرفت. چون سه پیشامد مستقل هستند، از ضرب احتمال هر کدام به تنهایی استفاده می کنیم.

$$P(A) = 6 \times \left(\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

۵ گزینه ۳



کل تعداد حالات ۱۶ = ۲^۴ حالت است. دو حالت نامطلوب وقتی است که همگی دختر یا همگی پسر باشند. در نتیجه تعداد حالات مطلوب ۱۴ تا است.

$$P(A) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

۶ گزینه ۲



$$\frac{12 \times 11}{2} = 66 \text{ کل حالات برابر است با انتخاب ۲ مهره از ۱۲ مهره}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{5 \times 4}{2} &= 10: \text{انتخاب ۲ مهره از قرمزها} \\ \frac{4 \times 3}{2} &= 6: \text{انتخاب ۲ مهره از آبی ها} \\ \frac{3 \times 2}{2} &= 3: \text{انتخاب ۲ مهره از زردها} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تعداد حالاتی که ۲ مهره هم رنگ باشند}$$

$$10 + 6 + 3 = 19 \Rightarrow P(A) = \frac{19}{66}$$



۷ گزینه ۲

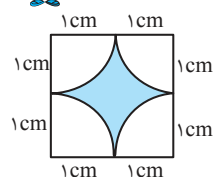
$$n(S) = 60 = 5 \times 4 \times 3: \text{کل حالات}$$

$$135, 315, 345, 435 \Rightarrow 4 \text{ عدد مضرب ۱۵}$$

$$\Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$



۸ گزینه ۲



اگر نقطه درون ناحیه رنگی باشد، فاصله آن از تمام رئوس مربع بزرگ تر از یک است.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{4 - \pi(1)^2}{4} \approx \frac{1}{4}$$



۹ گزینه ۳

۴	۵
سفید	سبز

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72}: \text{کارت دوم سفید و کارت اول سفید}$$

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72}: \text{کارت دوم سبز و کارت اول سبز}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{72} + \frac{20}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$



۱۰ گزینه ۲

$$P(A) = 2P(B) = \frac{1}{2}P(C)$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P(C) + \frac{1}{4}P(C) + P(C) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{4}{7}$$



سؤالات تشریحی فصل اول

۱. اعضای هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) $A = \{2 - 3x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\}$

ب) $B = \{x^2 - y \mid x, y \in \mathbb{Z}, 2^{x-2} = 3^y\}$

ج) $C = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, 3^x = x^2\}$

د) $D = \{x \mid \frac{x+1396}{x} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}\}$

هـ) $E = \{x \mid \sqrt{2+x^2} \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 10\}$

۲. هر یک از مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $A = \{-3, 4, 11, 18, \dots\}$

ب) $B = \{-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

ج) $C = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

د) $D = \{1, 121, 12321, \dots\}$

۳. تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $3n+1$ عضوی، ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $2n$ عضوی است. مقدار n را بیابید.

۴. سه مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 3, 5, 7\}$ و $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ را روی نمودار ون نشان دهید و عبارات زیر را به دست آورید.

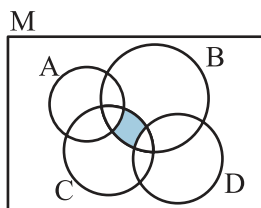
$$(A - B) \cup C$$

$$(A \cap B) \cup (C - B)$$

۵. ۲ تاس و یک سکه را می اندازیم. احتمال اینکه سکه رو بیاید و از ۲ تاس یکی فرد و دیگری زوج بیاید چقدر است؟

۶. اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ باشد، چند زیرمجموعه ۶ عضوی وجود دارد که شامل ۱ و ۲ باشد، ولی ۳ و ۴ را شامل نشود؟

۷. ناحیه رنگ شده در نمودار زیر را با نماد ریاضی بنویسید.



۸. در یک کلاس ۴۰ نفری، تمام ۸ نفری که به فیزیک علاقه دارند، به ریاضی هم علاقه دارند. در این کلاس ۱۵ نفر به شیمی، ۱۲ نفر فقط

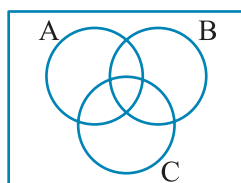
به ریاضی و ۲ نفر به هر سه درس علاقه دارند. چند نفر به هیچ یک از این سه درس علاقه ای ندارند؟

۹. اگر $L = \{-2, -1, 1, 2\}$ و $A = \{x \mid x = \frac{k}{2}, x \in \mathbb{Z}, k \in L\}$ ، مجموعه A چند عضو دارد؟

۱۰. درون کیسه ای، ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره از کیسه بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۳ مهره هم رنگ می باشند؟

۱۱. مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ دارای چند زیرمجموعه ۵ عضوی است، به گونه ای که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو آن ۸ باشد؟

۱۲. ناحیه مربوط به مجموعه روبه رو را در شکل زیر رنگ کنید.



$$(A - B)' \cup (C' - A)'$$



۱۳. بین اعداد سه رقمی، چند عدد وجود دارد که بر ۴ و ۳ بخش پذیر باشند، ولی بر ۱۸ بخش پذیر نباشند؟

۱۴. از ظرفی شامل ۶ کارت آبی، ۳ کارت سبز و ۴ کارت سفید یکسان، به تصادف یک کارت را بیرون می‌آوریم، سپس بدون جایگذاری، کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

۱۵. در کیسه‌ای ۷ مهره آبی و ۵ مهره سفید وجود دارد. مهره اول را بیرون آورده، کنار می‌گذاریم، مهره دوم را نیز بیرون آورده و کنار می‌گذاریم. سپس مهره سوم را بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن مهره سوم را به دست آورید.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

پاسخنامه سؤالات تشریحی فصل اول

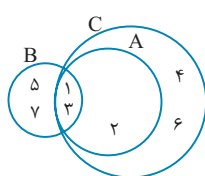
د) $D = \{1^2, 11^2, 111^2, \dots\}$

$$= \left\{ \left(\frac{1^0 - 1}{9} \right)^2, \left(\frac{1^{10} - 1}{9} \right)^2, \left(\frac{1^{100} - 1}{9} \right)^2, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1^{10^x} - 1}{9} \right)^2 \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

$$2^{2n+1} = 16 \times 2^{2n} \Rightarrow 2^{2n+1} = 2^4 \times 2^{2n}$$

$$\Rightarrow 2n+1 = 4+2n \Rightarrow n=3$$



$$A \cap B \cap C = \{1, 3\}$$

$$(\overbrace{A-B}^{\{1, 2, 3, 4, 6\}}) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\} = C$$

$$(\underbrace{A \cap B}_{\{1, 3\}}) \cup (\underbrace{C-B}_{\{2, 4, 6\}}) = \{1, 2, 3, 4, 6\} = C$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ احتمال رو آمدن سکه}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \text{ احتمال فرد آمدن تاس}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \text{ احتمال زوج آمدن تاس}$$

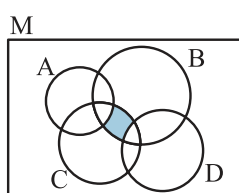
$$(زوج، فرد، رو) \text{ یا } (فرد، زوج، رو) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را کنار می‌گذاریم. حال باید از ۶ عضو باقی مانده، زیرمجموعه‌های

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

بنابراین زیرمجموعه‌های موردنظر برابر با این ۱۵ زیرمجموعه هستند. به‌طوری که ۱ و ۲ را نیز به آن‌ها اضافه کنیم.

از ناحیه مشترک C و B هر چه مربوط به A و D است را حذف می‌کنیم.



$$[(B \cap C) - A] - D$$

یا

$$(B \cap C) - (A \cup D)$$

۱

الف) $x = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow A = \{8, 5, 2, -1, -4\}$

ب) $\left. \begin{aligned} 2x - 2 = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \{1^2 - 0\} = \{1\}$

ج) $3^x = x^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow C = \{3^3\} = \{27\}$

د) $\left. \begin{aligned} \frac{x+1396}{x} = 1 + \frac{1396}{x} \in \mathbb{N} \\ 1396 = 2 \times 2 \times 349 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

اگر x از $\frac{1396}{x}$ مقسوم علیه‌های طبیعی ۱۳۹۶ باشد، آن‌گاه $\frac{1396}{x}$ ساده می‌شود و مقداری طبیعی را می‌دهد.

$$D = \{1, 2, 4, 349, 698, 1396\}$$

هـ) $n = \sqrt{2+x^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 = 2+x^2$

$$0 \leq x \leq 10 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 100 \xrightarrow{+2} 2 \leq 2+x^2 \leq 102$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+x^2} \leq \sqrt{102}$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = \sqrt{4}, \sqrt{9}, \dots, \sqrt{100}$$

$$n = 2, 3, \dots, 10, \quad x = \sqrt{n^2 - 2}$$

$$\xrightarrow{\substack{x \geq 0 \\ n=2,3,\dots}} x = \sqrt{2}, \sqrt{7}, \dots$$

$$E = \{\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{14}, \sqrt{23}, \sqrt{34}, \sqrt{47}, \sqrt{62}, \sqrt{79}, \sqrt{98}\}$$

۲

الف) $A = \{v(1) - 1^0, v(2) - 1^0, \dots\}$

فاصله دو عدد متوالی

$$\Rightarrow A = \{v x - 1^0 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

ب) $B = \left\{ \frac{(-1)^1}{1}, \frac{(-1)^2}{2}, \frac{(-1)^3}{3}, \dots \right\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ج) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{Z}\}$

اعضای مجموعه شمارنده‌های صحیح ۱۲ هستند.



۱۳

باید تعداد عددهایی که بر ۴ و ۳ (بر ۱۲) بخش پذیرند را به دست آورده، سپس اعدادی که بر ۱۲ و ۱۸ (بر ۳۶) بخش پذیرند را از آن کم کنیم.

۹۹۶، ۱۲۰، ۱۰۸، ... : بر ۱۲

$$75 = 1 + \frac{996 - 108}{12} : \text{تعداد اعداد ۳ رقمی بخش پذیر بر ۱۲}$$

۹۷۲، ۱۴۴، ۱۰۸، ... : بر ۳۶

$$25 = 1 + \frac{972 - 108}{36} : \text{تعداد اعداد ۳ رقمی بخش پذیر بر ۳۶}$$

$$\Rightarrow 75 - 25 = 50$$

۱۴

$$\frac{30}{156} = \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} : \text{«کارت دوم آبی» و «کارت اول آبی»}$$

$$\frac{6}{156} = \frac{2}{12} \times \frac{3}{13} : \text{«کارت دوم سبز» و «کارت اول سبز»}$$

$$\frac{12}{156} = \frac{3}{12} \times \frac{4}{13} : \text{«کارت دوم سفید» و «کارت اول سفید»}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{156} + \frac{6}{156} + \frac{12}{156} = \frac{48}{156} = \frac{4}{13}$$

۱۵

روش اول

اولی	دومی	سومی
آبی	آبی	سفید $\Rightarrow \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10}$
آبی	سفید	سفید $\Rightarrow \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{4}{10}$
سفید	آبی	سفید $\Rightarrow \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{10}$
سفید	سفید	سفید $\Rightarrow \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$

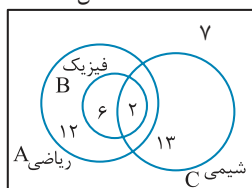
$$\Rightarrow \frac{210 + 140 + 140 + 60}{1320} = \frac{550}{1320} = \frac{55}{132} = \frac{5}{12}$$

روش دوم با توجه به نامعلوم و آزاد بودن انتخاب های اول و دوم، احتمال

$$\frac{5}{12} = \text{سفید بودن سومی مساوی است با احتمال سفید بودن اولی}$$

۸

کل: ۴۰



$$13 + 2 + 6 + 12 = 33$$

$$40 - 33 = 7$$

۹

$$x = \frac{1}{k} = \frac{-1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1, 1$$

مجموعه A دو عضو دارد. $\Rightarrow A = \{-1, 1\}$

۱۰

تعداد حالت های انتخاب ۳ تا از ۹ تا برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

تعداد حالت های انتخاب ۳ تا از بین قرمزها یا انتخاب ۳ تا از بین آبی ها برابر است با:

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

۱۱

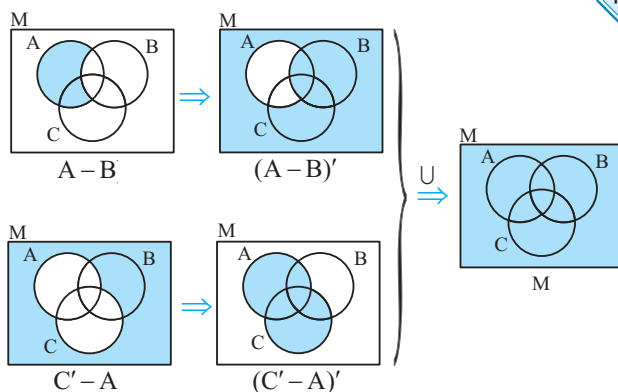
برای این که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو مجموعه، ۸ باشد، باید یکی از زوج اعداد زیر در مجموعه قرار بگیرند.

$$(1, 9), (2, 10), (3, 11), (4, 12)$$

بین این زوج اعداد، ۷ عدد وجود دارد که باید ۳ تا را انتخاب کنیم تا زیرمجموعه ۵ عضوی تشکیل دهند.

$$\Rightarrow 4 \times \binom{7}{3} = 4 \times \frac{7!}{3! \times 4!} = 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 140$$

۱۲



$$\Rightarrow (A-B)' \cup (C'-A)' = M \text{ کل مستطیل}$$

تست های جامع فصل اول

□□□□



□□□□

۱. اگر $A = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $\emptyset \subseteq A$ (۲) $\emptyset \in A$ (۳) $\{\emptyset, 1\} \subseteq A$ (۴) $\{\emptyset, \{1\}\} \subseteq A$

۲. مجموعه $B = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 3\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ عضو (۲) ۴ عضو (۳) ۶ عضو (۴) بی شمار

۳. مجموعه $A \cup B$ دارای ۷ عضو، $A \cap B$ سه عضو و $A - B$ دو عضو است. مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴. کدام مجموعه نسبت به هر چهار عمل اصلی بسته است؟

- (۱) مجموعه اعداد طبیعی (۲) مجموعه اعداد صحیح به جز صفر
(۳) مجموعه اعداد گویا به جز صفر (۴) مجموعه اعداد گنگ

۵. اگر $A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 2\}$ و $B = \{x^x \mid x \in A\}$ باشد، کدام گزینه عضوهای مجموعه B را نشان می دهد؟

- (۱) $\{0, 1, 9\}$ (۲) $\{-1, 0, 3\}$ (۳) $\{0, \frac{1}{2}, 8\}$ (۴) $\{\frac{1}{2}, 1, 8\}$

۶. دو تاس را با هم انداختیم. با کدام احتمال، مجموع دو عدد رو شده، عددی اول است؟

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۷. کدام گزینه نمایش ریاضی مجموعه $A = \{1, 2, 9, 28\}$ را نشان می دهد؟

- (۱) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^x + 1 < 29\}$ (۲) $A = \{x^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}, x < 29\}$
(۳) $A = \{x^x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ (۴) $A = \{x^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}, x < 4\}$

۸. اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < \frac{x}{3} - 1 < 1\}$ ، آن گاه A چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶

۹. مجموعه $B = \{11, 101, 1001, \dots\}$ به صورت ریاضی کدام است؟

- (۱) $\{1 \circ^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{1 \circ^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$
(۳) $\{1 \circ^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 1\}$ (۴) $\{1 \circ^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$

۱۰. مجموعه $\left\{a \mid \frac{n^3 - n}{a} \in \mathbb{N}, a, n \in \mathbb{N}, n = 26\right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۱. مجموعه $\left\{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 4\right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۲. مجموعه $\{(-1)^n + 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار



۱۳. مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد به طوری که مجموع بزرگترین و کوچکترین عضوهایش ۱۰ شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۳۱

۱۴. مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند زیرمجموعه دارد که حداقل شامل یک عدد فرد باشد؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۳۲ (۴) ۲۴

۱۵. اگر A و B و C سه مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq B \subseteq C$ باشد، آنگاه حاصل $[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B)$ کدام است؟

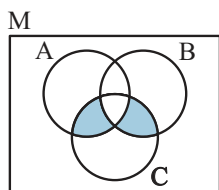
- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup C$ (۳) B (۴) C

۱۶. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k+1$ عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-3$ عضوی است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۷. در یک تیم فوتبال ۱۸ نفر بازی می‌کنند. از میان آن‌ها ۸ نفر دفاع، ۹ نفر هافبک و ۶ نفر در حمله بازی می‌کنند. ۴ بازیکن هم دفاع و هم هافبک بازی می‌کنند ولی هیچ کدام هم دفاع و هم حمله بازی نمی‌کنند. چند نفر از این بازیکنان فقط هافبک بازی می‌کنند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۱۸. در شکل مقابل، قسمت رنگ شده با کدام مجموعه زیر برابر است؟

- (۱) $(A \cup B) - C$ (۲) $(A \Delta B) - C$
(۳) $(A \Delta B) \cap C$ (۴) $C - (A \Delta B)$

۱۹. مجموعه $\{2, 3, 7, 14, 24, \dots\}$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{\frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2} + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$
(۳) $\{\frac{3n^2 - 7n + 8}{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۴) $\{\frac{3n^2 - 7n + 10}{3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

۲۰. مجموعه $\{2, -5, 8, -11, \dots\}$ کدام است؟

- (۱) $\{(-1)^k (3k-1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{(-1)^{k+1} (3k-1) \mid k \in \mathbb{N}\}$
(۳) $\{(-1)^k (3k+2) \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۴) $\{(-1)^{k+1} (3k+2) \mid k \in \mathbb{N}\}$

۲۱. در مجموعه‌ای با افزایش ۲ عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها ۳۸۴ واحد اضافه می‌شود. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن چند واحد افزایش می‌یابد؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۴۳ (۳) ۳۹ (۴) ۳۵

۲۲. مجموعه $\{x \mid \sqrt{x-1396} \in \mathbb{N}, x < 2000\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) بی‌شمار

۲۳. در چند زیرمجموعه ۶ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ، مجموع هیچ دو عضوی، ۱۳ نمی‌شود؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۲۴. مجموع تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌های k عضوی، $k+1$ عضوی و $k+3$ عضوی، ۳۴۹ می‌باشد. تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی این مجموعه چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

۲۵. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A و B از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را تعیین کرد، به طوری که $A \cap B$ دقیقاً یک عضو داشته باشد؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶۰ (۳) ۴۰۵ (۴) ۱۰۲۴

۲۶. به چند طریق می توان از هر یک از مجموعه های A و B و C، یک عضو انتخاب کرد، که حاصل ضرب ۳ عضو انتخاب شده عددی زوج باشد؟

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{5, 6, 8\}$$

$$C = \{10, 12, 15, 16, 18\}$$

$$118 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$

$$58 \quad (2)$$

$$48 \quad (1)$$

۲۷. کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

$$(A \cap A') \cap (B \cup B') = \emptyset \quad (2)$$

$$(B \cap B) \cup (A \cup A') = M \quad (1)$$

$$[(A \cap B) \cap A'] \cup [(B \cap C) \cap B'] = \emptyset \quad (4)$$

$$(B \cap B') \cup (A \cup A') = \emptyset \quad (3)$$

۲۸. درون کیسه ای ۶ مهره آبی و ۱۱ مهره قرمز قرار دارد. ۲ مهره به ترتیب و به طور تصادفی از کیسه بیرون می آوریم (بدون جایگذاری)

اگر احتمال این که هر ۲ مهره قرمز باشند $\frac{4}{13}$ باشد، چند مهره قرمز از ابتدا در کیسه وجود داشته است؟

$$9 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۲۹. چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که نه بر ۱۲ و نه بر ۱۸ بخش پذیر باشد؟

$$888 \quad (4)$$

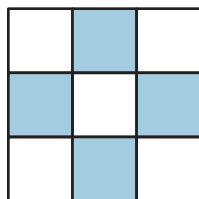
$$834 \quad (3)$$

$$724 \quad (2)$$

$$654 \quad (1)$$

۳۰. یک سکه به شعاع ۵/۰ سانتی متر را بر روی صفحه شطرنجی شکل زیر که هر ضلع آن ۶ سانتی متر است، پرتاب کرده ایم. احتمال اینکه

سکه به طور کامل درون مربع های سفید بیافتد، کدام است؟



$$\frac{4}{25} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\frac{5}{36} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$



پاسخنامه تشریحی و آموزشی تستهای جامع فصل اول

□□□□

□□□□



گزینه ۱

$$1+1=2, 1+2=3, 2+1=3, 1+4=5, 2+3=5$$

$$3+2=5, 4+1=5, 1+6=7, 2+5=7, 3+4=7$$

$$4+3=7, 5+2=7, 6+1=7, 5+6=11, 6+5=11$$

$$n(S)=36, n(A)=15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$



گزینه ۴

$$A = \{1, 2, 9, 28\} = \{0^7 + 1, 1^7 + 1, 2^7 + 1, 3^7 + 1\}$$

$$= \{x^7 + 1 \mid x \in W, x < 4\}$$



گزینه ۸

$$-2 < \frac{x}{3} - 1 < 1 \xrightarrow{+1} -1 < \frac{x}{3} < 2 \xrightarrow{\times 3} -3 < x < 6$$

$$\Rightarrow x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \text{عضو ۸}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیر مجموعه ها} = 2^4 = 256$$



گزینه ۳

$$B = \{1, 10^1, 10^2, \dots\} = \{1 \cdot 0^1 + 1, 1 \cdot 0^2 + 1, 1 \cdot 0^3 + 1, \dots\}$$

$$= \{1 \cdot 0^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 1\}$$



گزینه ۱۰

$$n^2 - n = n(n-1) = (n-1) \times n \times (n+1)$$

$$25 \times 26 \times 27 \Rightarrow \frac{25 \times 26 \times 27}{a} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{شمارنده } a \Rightarrow 5^2 \times 2^1 \times 13^1 \times 3^2 \text{ است}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد شمارنده ها} = 3 \times 2 \times 2 \times 4 = 48$$



گزینه ۱۱

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\left\{ \frac{(-3)^2 - 1}{(-3)^2 + 1}, \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2 + 1}, \dots, \frac{(3)^2 - 1}{(3)^2 + 1} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{8}{10}, \frac{3}{5}, 0, -1 \right\} \Rightarrow \text{عضو دارد. ۴}$$



گزینه ۱

$\{\emptyset, 1\}$ عضو A است نه زیرمجموعه A.



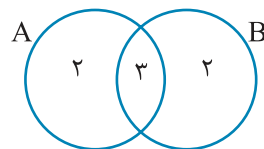
گزینه ۲

$$x + y = 3 \xrightarrow{x, y \in \mathbb{Z}} \begin{cases} (0, 3) \Rightarrow 0^3 = 0 \\ (1, 2) \Rightarrow 1^2 = 1 \\ (2, 1) \Rightarrow 2^1 = 2 \\ (3, 0) \Rightarrow 3^0 = 1 \\ (4, -1) \Rightarrow 4^{-1} = \frac{1}{4} \\ \dots \end{cases}$$

چون X و Y عضو اعداد صحیح هستند، پس می توانند بی شمار مقدار داشته باشند، به طوری که $x + y = 3$ شود.



گزینه ۳



$$n(B - A) = 7 - 2 - 3 = 2$$



گزینه ۴

بررسی گزینه ۱: اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق و تقسیم بسته نیستند.

$$\text{مثال: } 1 - 2 = -1, 1 \div 2 = \frac{1}{2}$$

بررسی گزینه ۲: اعداد صحیح نسبت به عمل تقسیم بسته نیستند.

$$\text{مثال: } -2 \div 3 = -\frac{2}{3}$$

بررسی گزینه ۳: اعداد گویای غیر صفر نسبت به هر چهار عمل اصلی بسته است.

بررسی گزینه ۴: اعداد گنگ نسبت به هیچ عملی بسته نیستند.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \quad (\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 0 \quad \text{مثال}$$

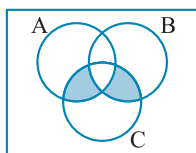
$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \quad \sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1$$



گزینه ۵

$$x = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow A = \{3, 0, -1\} \Rightarrow B = \left\{ \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{4} \right\}$$

پس قسمت رنگ شده در شکل، اشتراک تفاضل متقارن با C است.



گزینه ۳

تنها گزینه‌ای که به ازای $n = 2$ حاصل ۳ می‌شود، گزینه ۳ است.



گزینه ۲

تنها گزینه‌ای که به ازای $k = 1$ حاصل ۲ می‌شود، گزینه ۲ است.



گزینه ۱

$$2^{n+2} - 2^n = 384 \Rightarrow 2^n(4-1) = 384$$

$$\Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow n = 7$$

$$\Rightarrow \binom{7+2}{3} - \binom{7}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3! \times 6!} - \frac{7 \times 6 \times 5}{3! \times 4!} = 84 - 35 = 49$$



گزینه ۲

$$\sqrt{x - 1396} = n \Rightarrow x - 1396 = n^2 \Rightarrow x = n^2 + 1396$$

$$x < 2000 \Rightarrow n^2 + 1396 < 2000$$

$$\Rightarrow n^2 < 604 \Rightarrow n < \sqrt{604}$$

$$\Rightarrow n = 1, 2, 3, \dots, 24 \Rightarrow 24 \text{ عضو دارد}$$

$$x = n^2 + 1396 \Rightarrow \{1397, 1400, 1405, \dots, 1972\}$$



گزینه ۴

مجموعه را به ۲ مجموعه جدا تقسیم می‌کنیم.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ و } B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

برای نوشتن یک زیرمجموعه ۶ عضوی، به طوری که مجموع هیچ دو عضوی ۱۳ نشود، باید بین هر دو عضو مجموعه A و B که در مستطیل‌ها نوشته شده، یکی را انتخاب کنیم پس برای هر یک ۲ حالت داریم:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{matrix}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$



گزینه ۲

$$2^k - 1 + 2^{k+1} - 1 + 2^{k+2} - 1 = 349$$

$$\Rightarrow 2^k - [1 + 2 + 8] = 352 \Rightarrow 2^k \times 11 = 352 \Rightarrow 2^k = 32$$

$$\Rightarrow k = 5 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$



گزینه ۲

$$n \text{ فرد: } (-1)^n + 1^n = -1 + 1 = 0$$

$$n \text{ زوج: } (-1)^n + 1^n = 1 + 1 = 2$$



گزینه ۳

برای اینکه مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو مجموعه ۱۰ شود، باید از زوج اعداد زیر یکی را انتخاب کنیم.

$$(2, 8) \text{ و } (3, 7) \text{ و } (4, 6)$$

چون زیرمجموعه‌های ۵ عضوی می‌خواهیم، برای زوج عدد (۳, ۷)، یک انتخاب داریم: $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

$$\text{و برای زوج عدد } (2, 8), \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

برای (۴, ۶) هم که حالتی نداریم.

$$\Rightarrow 1 + 10 = 11$$



گزینه ۱

با ۲ عضو ۲ و ۴، می‌توان 2^2 زیرمجموعه نوشت، که عدد فردی در آن‌ها نباشد پس اگر از کل زیرمجموعه‌ها که $2^5 = 32$ تا هستند این ۴ تا را برداریم در بقیه حداقل یک فرد داریم.



گزینه ۳

$$A \cap B = A \\ A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$$

$$B \subseteq C \Rightarrow B \cap C = B$$

$$[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B) = (A \cup C) \cap B = C \cap B = B$$

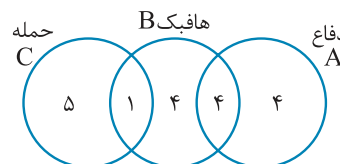


گزینه ۳

$$\frac{2^{k+1}}{2^{k-2}} = 2^{k+1-k+2} = 2^4 = 16$$



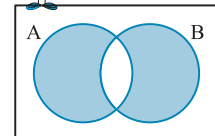
گزینه ۴



باید مجموعشان ۱۸ شود.



گزینه ۳



$A \Delta B$: تفاضل متقارن است که در نمودار ون به صورت زیر نشان داده می‌شود.



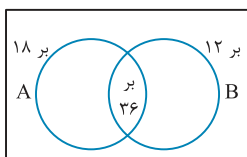
$$\Rightarrow \frac{n}{n+6} \times \frac{n-1}{n+5} = \frac{4}{13} \Rightarrow \frac{n^2-n}{n^2+11n+30} = \frac{4}{13}$$

$$\Rightarrow 13n^2 - 13n = 4n^2 + 44n + 120$$

$$\Rightarrow 9n^2 - 57n - 120 = 0 \xrightarrow{\text{تست گزینه‌ها}} n = 8$$



گزینه ۴



$$12 \text{ بر } \frac{999}{12} \approx 83$$

$$18 \text{ بر } \frac{999}{18} \approx 55$$

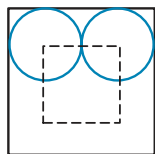
$$36 \text{ بر } \frac{999}{36} \approx 27$$

$$\Rightarrow 83 + 55 - 27 = 111 : 18 \text{ یا } 12$$

$$\Rightarrow 999 - 111 = 888$$



گزینه ۴



توجه: برای این که سکه به طور کامل درون یک مربع سفید 2×2 واقع شود، باید مرکز آن درون مربعی به فاصله 0.5 سانتی‌متر از اضلاع قرار گیرد پس مرکز سکه باید درون مربعی به مساحت 1 cm^2 واقع شود.

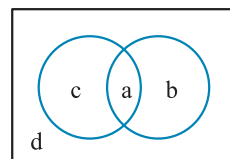
بنابراین احتمال اینکه سکه درون یکی از ۵ مربع سفید قرار گیرد، برابر است با:

$$P(A) = \frac{\text{جمع مساحت‌های مطلوب}}{\text{مساحت کل}} = \frac{5 \times 1 \text{ cm}^2}{6 \times 6 \text{ cm}^2} = \frac{5}{36}$$



گزینه ۳

مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را باید طوری در نظر بگیریم که در نمودار ون، قسمت اشتراک A و B فقط یک عضو قرار بگیرد. همان‌طور که در نمودار مشخص است، ۴ قسمت جدا از هم d, c, b, a وجود دارد. با توجه به صورت مسئله، a باید دقیقاً یک عضو باشد، پس ۵ انتخاب برای a داریم. چهار عضو باقی‌مانده ۳ حالت برای قرارگیری دارند. (d, c, b) پس کل حالات برابر است با:



$$5 \times 3^4 = 5 \times 81 = 405$$



گزینه ۲

تعداد حالت‌های مطلوب برای حاصل ضرب زوج خیلی زیاد است، پس کل حالت‌ها را به دست می‌آوریم و حالات نامطلوب (حاصل ضرب فرد شود) را از کل کم می‌کنیم.

$$4 \times 3 \times 5 - 2 \times 1 \times 1 = 60 - 2 = 58$$



گزینه ۳

باید توجه کنیم که اشتراک هر مجموعه با متممش برابر با تهی و اجتماعشان برابر با M است.

$$B \cap B' = \emptyset \\ A \cup A' = M \Rightarrow \emptyset \cup M = M$$

پس گزینه ۳ غلط است.



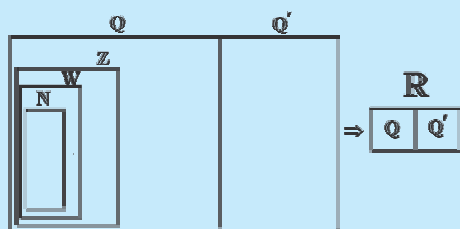
گزینه ۳

اولی قرمز: n تا از n+6 تا: $\frac{n}{n+6}$ پس یک قرمز کم شد.

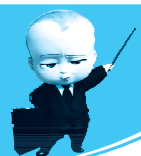
دومی قرمز: n-1 تا از n+5 تا: $\frac{n-1}{n+5}$



یادداشت



ممتوا و فهرست موضوعی فصل



- | | |
|--|---|
| ۶۹ مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) | مجموعه اعداد حقیقی |
| ۷۲ فاصله یا بازه | ۶۲ مجموعه اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) |
| ۷۲ قدر مطلق | ۶۴ نوشتن چند کسر بین دو کسر |
| ۷۳ ویژگی‌های قدر مطلق | ۶۴ خاصیت تلسکوپی |
| ۷۴ معادله قدر مطلق | ۶۵ کسر مسلسل |
| سوالات تشریحی و تست‌های جامع فصل دوم | ۶۶ کسرهای خودتکرار |
| ۷۶ سوالات تشریحی فصل دوم | ۶۷ اعشاری‌ها |
| ۷۸ پاسخ‌نامه سوالات تشریحی | ۶۷ اعداد متناوب |
| ۸۱ تست‌های جامع فصل دوم | ۶۷ تشخیص شکل اعشاری یک کسر |
| ۸۴ پاسخ‌نامه تشریحی و آموزشی | ۶۹ مجموعه اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$) |

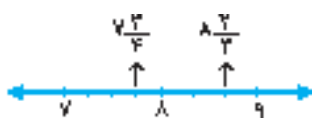
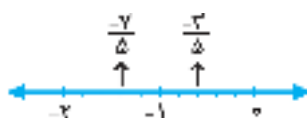
اعداد حقیقی

مجموعه اعداد گویا (Q)

عددی را که بتوان به شکل یک کسر با صورت صحیح و مخرج صحیح غیر صفر نوشت، عدد گویا گویند. مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهند، لذا:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

برای نمایش عدد $\frac{a}{b}$ روی محور، بین واحدها را b قسمت کرده و به اندازه a قسمت حرکت می‌کنیم.



برای سریع‌تر ساده کردن کسرها از ب.م.م صورت و مخرج استفاده می‌کنیم، مثلاً:

$$(700, 420) = 140 \Rightarrow \frac{700}{420} = \frac{700 \div 140}{420 \div 140} = \frac{5}{3}$$

کسر تحویل‌ناپذیر

به کسرهای ساده‌نشده، یعنی کسرهایی که ب.م.م صورت و مخرجشان ۱ باشد، تحویل‌ناپذیر گویند.

$$(a, b) = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ کسر تحویل‌ناپذیر}$$

در سال‌های گذشته با عملیات‌های مختلف روی کسرها آشنا شدیم. به مثال ۱ توجه کنید.



حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف $(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{7}) \cdots (1 - \frac{1}{242})$

طبق اتحاد مزدوج همواره داریم: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ و چون پراتت‌ها به شکل $(1)^2 - (\frac{1}{n})^2$ هستند، می‌نویسیم:

$$(1 - \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{6})(1 + \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{7})(1 + \frac{1}{7}) \cdots (1 - \frac{1}{242})(1 + \frac{1}{242}) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{6} \cdots \frac{242}{241} \times \frac{241}{242} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$$

ب $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{39}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} + \cdots + \frac{1+2+3+\cdots+39}{40}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2 \times 3}{3} + \frac{3 \times 4}{4} + \frac{4 \times 5}{5} + \cdots + \frac{39 \times 40}{40} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{39}{2} = \frac{1+2+3+\cdots+39}{2} = \frac{39 \times 40}{2} = 39 \times 10 = 390$$

ج $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{\frac{4}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{15}{8} - \frac{4}{15} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{15}{8} - \frac{4}{15} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$



$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

طبق قاعده دور در دور، نزدیک در نزدیک، می دانیم که:

$$\text{د} \quad 1 - \frac{1 - \frac{2}{1}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{-2}{1}}{\frac{-16}{11}} = 1 - \frac{2 \times 11}{1 \times 16} = 1 - \frac{11}{8} = \frac{-3}{8}$$

$$\text{صورت} \quad 1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{\frac{2}{3}} = 1 - 3 = -2$$

$$\text{مخرج} \quad -2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = -2 + \frac{1}{\frac{2}{3}} = -2 + \frac{3}{2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{د} \quad \frac{3 \times 6 \times 9 + 9 \times 18 \times 27 + 27 \times 42 \times 57}{6 + 3 \times 9 \times 9 + 9 \times 21 \times 19} = \frac{3 \times 2 \times 3 \times (1 \times 2 \times 3 + 3 \times 9 \times 9 + 9 \times 21 \times 19)}{6 + 3 \times 9 \times 9 + 9 \times 21 \times 19} = 3 \times 2 \times 3 = 18$$

کسری تحویل ناپذیر بیابید که اگر به صورتش ۲۴ و به مخرجش ۱۰ واحد بیفزاییم، مقدار کسر تغییر نکند.



$$\frac{a}{b} : \text{کسر مورد نظر} \Rightarrow \frac{a+24}{b+10} = \frac{a}{b} \Rightarrow a(b+10) = b(a+24) \Rightarrow ab+10a = ba+24b \Rightarrow 10a = 24b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

پاسخ:

نتیجه: کسری که با افزودن m واحد به صورت و n واحد به مخرجش تغییر نکند، همان $\frac{m}{n}$ است، زیرا:

$$\frac{a+m}{b+n} = \frac{a}{b} \Rightarrow a(b+n) = b(a+m) \Rightarrow ab+an = ba+bm \Rightarrow an = bm \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{17}{42} \text{ و } \frac{13}{28} \text{ را مقایسه کنید.}$$



پاسخ: مخرج مشترک می گیریم و سپس صورتها را مقایسه می کنیم. بهترین مخرج مشترک نیز همان م.م.م است.

$$\frac{13 \times 3}{28 \times 3}, \frac{17 \times 2}{42 \times 2} \Rightarrow \frac{39}{84} > \frac{34}{84} \Rightarrow \frac{13}{28} > \frac{17}{42}$$

کسری مساوی با $\frac{21}{49}$ بیابید که اختلاف صورت و مخرجش ۳۲ واحد باشد.



صورت	۳	۲۴	$\Rightarrow \frac{24}{56}$
مخرج	۷	۵۶	
اختلاف	۴	۳۲	

$\times 8$

$(\frac{21}{49} = \frac{3}{7})$

پاسخ:



نوشتن پندر کسر بین دو کسر

■ روش مخرج مشترک گرفتن

■ روش میانگین گرفتن

$$\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

■ روش جمع صورت‌ها باهم و مخرج‌ها باهم: برای کسرهای هم‌علامت داریم:

مثال ۵
بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ سه کسر بنویسید.



پاسخ: ۱) روش مخرج مشترک:

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 5}, \frac{4 \times 4}{5 \times 4} \Rightarrow \frac{15}{20}, \frac{16}{20}$$

بین ۱۵ و ۱۶ عدد صحیح نداریم پس چون سه تا کسر می‌خواهیم دوباره در $(3+1)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{15 \times 4}{20 \times 4}, \frac{16 \times 4}{20 \times 4} \Rightarrow \frac{60}{80}, \frac{64}{80} \Rightarrow \text{بین: } \frac{61}{80}, \frac{62}{80}, \frac{63}{80}$$

۲) روش میانگین گرفتن: فرقی ندارد از کدام خانه شروع کنیم:

$$\frac{3}{4} < \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{61}{80} < \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{31}{40} < \frac{\frac{31}{40} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{63}{80} < \frac{4}{5}$$

(۱) مرحله

۳) روش جمع صورت‌ها باهم و مخرج‌ها باهم: فرقی ندارد از کدام خانه شروع کنیم:

$$\frac{3}{4} < \frac{3+7}{4+9} = \frac{10}{13} < \frac{3+4}{4+5} = \frac{7}{9} < \frac{7+4}{9+5} = \frac{11}{14} < \frac{4}{5}$$

(۱) مرحله

مثال ۶
چند کسر بین $\frac{1}{12}$ و $\frac{7}{18}$ با مخرج ۹ وجود دارد؟



$$\frac{1}{12}, \frac{7}{18}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{3}{36}, \frac{14}{36}$$

پاسخ: کسرهای $\frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \dots, \frac{13}{36}$ بین این دو کسرند.

هرکدام که صورتش مضرب ۴ باشد، با مخرج ساده شده و مخرج ۹ می‌شود.

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \frac{8}{36} = \frac{2}{9}, \frac{12}{36} = \frac{3}{9} \Rightarrow \text{سه کسر}$$

مثال ۷
چند کسر بین $\frac{8}{13}$ و $\frac{5}{11}$ با صورت ۸۰ وجود دارد؟



پاسخ:

$$\frac{5 \times 16}{11 \times 16}, \frac{8 \times 10}{13 \times 10}$$

$$\frac{80}{176}, \frac{80}{130} \Rightarrow \text{بین: } \frac{80}{131}, \frac{80}{132}, \frac{80}{133}, \dots, \frac{80}{175} \Rightarrow \text{تعداد} = \text{آخری} - \text{اولی} + 1 = 175 - 131 + 1 = 45$$

خاصیت تلسکوپی

اگر $a = c - b$ و $b < c$ باشد، داریم: $\frac{a}{b \times c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$

$$\frac{13-12}{12 \times 13} = \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \quad \text{یا} \quad \frac{11-8}{8 \times 11} = \frac{1}{8} - \frac{1}{11} \quad \text{یا} \quad \frac{35-10}{10 \times 35} = \frac{1}{10} - \frac{1}{35} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{19 \times 21} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{21-19}{19 \times 21} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right)$$



$$\text{یا} \quad \frac{5}{7 \times 13} = 5 \times \frac{1}{7 \times 13} = \frac{5}{6} \times \left(\frac{6}{7 \times 13} \right) = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right)$$

از این خاصیت در مجموع کسرهای تلسکوپی متوالی استفاده می‌کنیم.

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

مثال ۹

الف $\frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \dots + \frac{1}{15 \times 16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

با توجه به مثال الف، در کسرهایی که شرایط تسکوپی را دارند، (اختلاف دو عدد مخرج X) مانند زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{x}{a \times b} + \frac{x}{b \times c} + \frac{x}{c \times d} + \dots + \frac{x}{m \times n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \dots + \frac{1}{19 \times 21} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{19 \times 21} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{21} = \frac{1}{7}$

ج $\frac{3}{6 \times 9} + \frac{4}{9 \times 13} + \frac{5}{13 \times 18} + \frac{6}{18 \times 24} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$
(همه شرایط تسکیم را دارد)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{0}{1} \div \frac{0}{2}}{1+2} + \frac{\frac{0}{2} \div \frac{0}{3}}{1+2+3} + \frac{\frac{0}{3} \div \frac{0}{4}}{1+2+3+4} + \dots + \frac{\frac{0}{19} \div \frac{0}{20}}{1+2+3+\dots+20} \\
 &= \frac{\frac{0}{1 \times 2}}{2} + \frac{\frac{0}{2 \times 3}}{6} + \frac{\frac{0}{3 \times 4}}{10} + \dots + \frac{\frac{0}{19 \times 20}}{210} = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{19 \times 20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{9} \quad & \frac{3}{15} + \frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} = 3 \left(\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} \right) \\ & = \frac{3}{3} \left(\frac{1}{\cancel{3} \times 5} + \frac{1}{5 \times \cancel{7}} + \frac{1}{\cancel{7} \times 9} + \frac{1}{9 \times \cancel{11}} \right) = \frac{3}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right) = \frac{3}{3} \times \frac{6}{55} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{45} &= \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{2}{90} = \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{2}{90} \\ &= 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{90} \right) = 2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{90} \right) = 2 \times \frac{14}{90} = \frac{14}{45} \end{aligned}$$

تلسکوپى جمع

اگر صورت، با مجموع ضرب‌شونده‌های مخرج برابر باشد به‌صورت زیر جداسازی انجام می‌شود.

$$\frac{V}{3 \times 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{19}{9 \times 10} = \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{2 \times 3} - \frac{12}{3 \times 9} + \frac{21}{9 \times 12} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

justus jmk

الف) برای محاسبه کسر مسلسل از کوچکترین خط کسری شروع می‌کنیم:

مثال ۱۰

حاصل عبارت زیر را بنویسید.

[illegible]



ب) برای برگرداندن یک کسر به شکل مسلسل، دو عمل «تبدیل کسر به عدد مخلوط» و «تبدیل کسر به $\frac{1}{\text{معکوس کسر}}$ » را به طور متوالی انجام می‌دهیم تا جایی که صورت کسر، یک شود.



در تساوی مقابل حاصل $x + y + z$ چند است؟

پاسخ:

$$\frac{30}{17} = 1 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$$

$$\frac{30}{17} \xrightarrow{\text{مخلوط}} 1 + \frac{13}{17} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1 + \frac{1}{\frac{17}{13}} \xrightarrow{\text{مخلوط}} 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{13}} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} \xrightarrow{\text{مخلوط}} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} \Rightarrow x=1, y=3, z=4 \Rightarrow x+y+z=8$$

کسرهای خودتکرار



مقدار عبارت‌های زیر را بیابید.

پاسخ:

الف) $A = 3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{\dots}}} \Rightarrow A = 3 + \frac{4}{A} \xrightarrow{\times A} A^2 = 3A + 4 \Rightarrow A^2 - 3A = 4$

$A(A-3) = 4$: حاصل ضرب چه عددی در ۳ تا کمتر از خودش، ۴ همیشه؟ خود ۴

$$A \times (A-3) = 4(4-3) \Rightarrow A = 4$$

(البته ۱- هم این‌طور هست که چون A منفی نیست، ۱- قابل قبول نیست)

ب) $B = 1 + \frac{42}{1 + \frac{42}{1 + \frac{42}{\dots}}} \Rightarrow B = 1 + \frac{42}{B} \xrightarrow{\times B} B^2 = B + 42 \Rightarrow B^2 - B = 42$

$B(B-1) = 42$: حاصل ضرب کدام عدد مثبت در یکی کمتر از خودش، ۴۲ همیشه؟ عدد ۷

$$B \times (B-1) = 7 \times (7-1) \Rightarrow B = 7$$



هرگاه بدانیم $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$ ، حاصل $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots$ کدام است؟

(انرژی اتمی ۸۲)

۲ (۴)

۱/۷۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه «۴»

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 = 2$$

اعشاری‌ها

شکل اعشاری کل اعداد، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد:

مختوم: اعداد اعشاری با تعداد رقم‌های اعشاری محدود، مانند $۶/۱۷$ یا $۹۰۵/۲$ یا $۰/۴۱۰۹۹۸۳$ یا ... (که همگی گویا هستند)

گویا $\left\{ \begin{array}{l} \text{ساده: کل اعشار تکرار می‌شود مانند: } ۱۷/۴۳ = ۱۷/۴۳۴۳۴۳... \\ \text{مركب: قسمتی از اعشار تکرار می‌شود، مانند: } ۴/۲۵۶۰۱۶۰۱۶۰۱۶۰۱... = ۴/۲۵۶۰۱ \end{array} \right\}$ **نامختوم:** بی‌شمار رقم اعشاری دارد:

گنگ $\left\{ \begin{array}{l} \text{بدون نظم: مانند } \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹... \\ \text{بانظم غیرتکراری: مانند } ۵/۱۲۱۱۲۱۱۲۱۱۱۲۱... \end{array} \right\}$ **نامتناوب**

چهل و هفتمین رقم اعشار در عدد $\frac{۵}{۲۷}$ چیست؟



پاسخ:

$$\begin{array}{r} ۲۷ \\ ۵/۰۰۰۰۰۰۰ \overline{) ۰/۱۸۵۱۸۵۱۸۵۰۰۰} = ۰/۱۸۵ \\ \vdots \end{array}$$

اعشار، سه رقم سه رقم تکرار می‌شود. رقم سوم و ششم و نهم و ... و چهل و پنجم با الگوی ۳n، همان رقم ۵ است. پس رقم چهل و هفتم رقم ۸ است.

نوزدهمین رقم اعشار عدد $\frac{۷}{۸۸}$ را بیابید.



پاسخ:

$$۷ \div ۸۸ = ۰/۰۷۹۵۴۵۴۵۴۰۰ = ۰/۰۷۹۵۴$$

رقم‌های اعشار شماره ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ و ... با الگوی $۲n + ۲$ ، رقم ۵ است و رقم‌های اعشار شماره ۵ و ۷ و ۹ و ... و ۱۹ با الگوی $۲n + ۳$ ، رقم ۴ است.

اعداد متناوب

تناوب به معنای تکرار است. در اعداد اعشاری متناوب، تعدادی از رقم‌های اعشار تا بی‌نهایت تکرار می‌شوند که به این ارقام، رقم‌های گردش می‌گوییم. برای خلاصه‌نویسی آن‌ها را یک بار نوشته و رویشان یک خط قرار می‌دهیم.

$$۱۷۴/۳۵۱۲۳۵۱۲۳۵۱۲۳۵۱۲... = ۱۷۴/۳۵۱۲\overline{۳۵۱۲}$$

$$۳۶/۱۹۵۸۲۸۲۸۲۸۲... = ۳۶/۱۹۵۸۲\overline{۸۲}$$



در عددهای اعشاری مختوم، رقم صفر تکرار می‌شود که بی‌تأثیر است.

$$۴۵/\overline{۰} = ۴۵$$

$$۰/۳۸۲\overline{۰} = ۰/۳۸۲$$

$$۰/۳۷۳۷ = ۰/۳۷, ۱۲/۷۴۴۴ = ۱۲/۷۴, ۹/۱۵۱۵۱۵ = ۹/۱۵$$

تکرار در گردش، قابل حذف است:

$$۰/\overline{۹} = ۱, ۲/۷۲۹ = ۲/۷۳, ۷۹۹/\overline{۹} = ۸۰۰$$

اگر رقم گردش، فقط ۹ باشد، حذف شده و یکی به رقم قبلی اضافه می‌شود:

تشخیص شکل اعشاری یک کسر

برای آنکه بفهمیم عدد اعشاری متناظر با کسر، مختوم یا متناوب (ساده یا مرکب) است، ابتدا کسر را ساده کرده و سپس فقط مخارج را تجزیه می‌کنیم. اگر عامل‌های اول مخارج:

$$\frac{\square}{2 \times 2 \times 2}, \frac{\square}{5}, \frac{\square}{2 \times 5 \times 5}, \frac{\square}{5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2}$$

■ فقط ۲ یا ۵ (یا هر دو) باشد $\Rightarrow$ مختوم است، مانند:

$$\frac{\square}{11}, \frac{\square}{3 \times 7}, \frac{\square}{7 \times 7 \times 19}$$

■ غیر ۲ یا ۵ باشد $\Rightarrow$ متناوب ساده است، مانند:



$$\frac{\square}{2 \times 3}, \frac{\square}{2 \times 5 \times 7}, \frac{\square}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11}$$

■ ترکیبی از ۲ یا ۵ و غیر آن‌ها باشد $\Rightarrow$ متناوب مرکب است، مانند:



نوع اعشاری کسره‌های زیر را مشخص کنید.

الف $\frac{45}{24} \div \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow$ مختوم

ب $\frac{80}{540} \div \frac{20}{27} = \frac{4}{27} = 3 \times 3 \times 3 \Rightarrow$ متناوب ساده

ج $\frac{273}{1820} \div \frac{91}{20} = \frac{3}{20} = 2 \times 2 \times 5 \Rightarrow$ مختوم

د $\frac{23}{84} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 7} \Rightarrow$ متناوب مرکب



در کسر $\frac{16n^2 - 24n}{70n - 105}$ حداقل مقدار n چند باشد تا نماد اعشاری این کسر، متناوب ساده باشد؟ ($n \neq \frac{3}{2}$)

$$\frac{16n^2 - 24n}{70n - 105} = \frac{8n(2n - 3)}{35(2n - 3)} = \frac{8n}{35} = \frac{8n}{5 \times 7}$$

در مخرج عامل ۵ و ۷ وجود دارد پس انگار متناوب مرکب است. برای متناوب ساده شدن باید عامل ۵ ساده شود لذا $n = 5$.

$$\frac{8 \times 5}{5 \times 7} = \frac{8}{7} \Rightarrow$$
 متناوب ساده



اعداد اعشاری زیر را به شکل کسر متعارفی بنویسید.

الف $A = 0.\overline{13}$

$$100 \times A = 100 \times 0.\overline{13} = 13.\overline{13} \Rightarrow \begin{cases} 100A = 13.\overline{13} \\ -A = -0.\overline{13} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} 99A = 13 \Rightarrow A = \frac{13}{99}$$

پاسخ:

ب $B = 2.\overline{7}$

$$10 \times B = 10 \times 2.\overline{7} = 27.\overline{7} \Rightarrow \begin{cases} 10B = 27.\overline{7} \\ -B = -2.\overline{7} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} 9B = 25 \Rightarrow B = \frac{25}{9}$$

پاسخ:



پشت گردش - کی

$\overline{99 \dots 9}$

به تعداد رقم‌های گردش

فرمول تبدیل متناوب ساده به کسر متعارفی:

$$B = \frac{27 - 2}{9} = \frac{25}{9}, \quad A = \frac{13}{99}, \quad a / \overline{bcd} = \frac{\overline{abcd} - a}{999}$$

ج $C = 0.\overline{123} \Rightarrow \begin{cases} 1000C = 123.\overline{3} \\ 100C = 12.\overline{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 900C = 111 \Rightarrow C = \frac{111}{900}$

د $D = 10.\overline{304} \Rightarrow \begin{cases} 10000D = 10304.\overline{4} \\ 10D = 10.\overline{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 9990D = 10294 \Rightarrow D = \frac{10294}{9990}$



پشت گردش - کی

$\overline{99 \dots 9}$

به تعداد

عشاری غیر گردش، رقم‌های گردش

فرمول تبدیل متناوب مرکب به کسر متعارفی:

(با این فرمول دیگر نیازی به فرمول متناوب ساده هم نیست)

$$a / \overline{bcdef} = \frac{\overline{abcdef} - \overline{abcd}}{99000}$$

$$C = \frac{123 - 12}{900} = \frac{111}{900}, \quad D = \frac{10304 - 10}{9990} = \frac{10294}{9990}$$

حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



الف $11/\overline{26} + 7/\overline{3} = 18/\overline{59}$

$$\frac{11}{26} + \frac{7}{3} = \frac{11 \times 3 + 7 \times 26}{26 \times 3} = \frac{33 + 182}{78} = \frac{215}{78}$$

ب $0/\overline{7} - 0/\overline{29} = \frac{7}{9} - \frac{29}{99} = \frac{77}{99} - \frac{29}{99} = \frac{48}{99} = \frac{16}{33}$

ج $1/\overline{06} \times 0/\overline{106} = \frac{106-10}{90} \times \frac{106-1}{990} = \frac{96}{90} \times \frac{105}{990} = \frac{16}{15} \times \frac{7}{33} = \frac{8}{15} \times \frac{7}{33} = \frac{56}{495}$

اگر $\frac{2}{3} = 0/\overline{543} + 0/\overline{xyz}$ باشد، حاصل $x + y + z$ چند است؟



پاسخ: $0/\overline{543} + 0/\overline{xyz} = \frac{543}{999} + \frac{xyz}{999} = \frac{2 \times 333}{3 \times 333} = \frac{666}{999} \Rightarrow xyz = 666 - 543 = 123 \Rightarrow x + y + z = 1 + 2 + 3 = 6$

مجموعه اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$)

اعداد گنگ (غیرگویا) قابل تبدیل به کسر نیستند و شکل اعشاریشان نامختوم نامتناوب است، یعنی بی شمار رقم اعشار بدون نظم و تکرار یکسان دارند. مانند: $\pi = 3/141592653589\ldots$ یا $2/030030003000030000\ldots$

مثال مشهور از اعداد گنگ، جذر اعداد طبیعی غیرمجدور کامل است، مانند: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$

گنگ یا گویا بودن اعداد زیر را مشخص کنید.



$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ $(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2$ $(\sqrt{18} - \sqrt{8})^2$ $\frac{\sqrt{72} \times \sqrt{27}}{\sqrt{54}}$

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}'$

$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2 = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

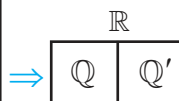
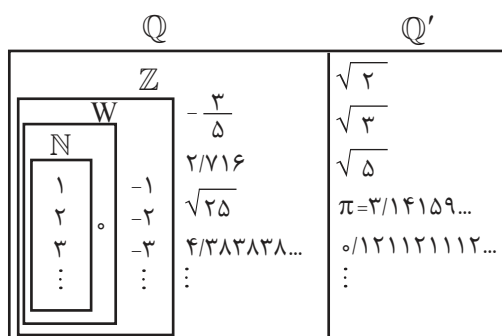
$(\sqrt{18} - \sqrt{8})^2 = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$

$\frac{\sqrt{72} \times \sqrt{27}}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{36 \times 2} \times \sqrt{9 \times 3}}{\sqrt{9 \times 6}} = \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = 6 \in \mathbb{Q}$

پاسخ:

مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)

به مجموعه همه اعداد گویا و گنگ، اعداد حقیقی گویند.



$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

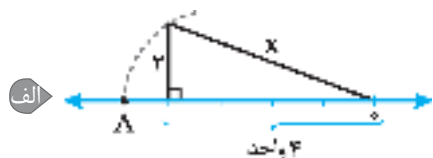
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

تمامی اعداد مورد بحث و نیاز ما عضو $\mathbb{R}$ (حقیقی) هستند.

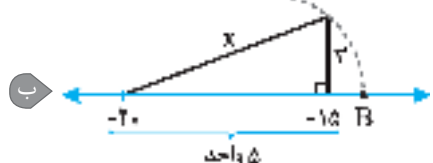
می دانیم که $\sqrt{-1}$ وجود ندارد ولی خوب است بدانید که با تعریف $\sqrt{-1} = i$ به عنوان عدد، مجموعه اعداد بزرگتری به نام مختلط یا موهومی ($\mathbb{C}$) ساخته می شود که $\mathbb{R}$ زیرمجموعه آن است. ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)



نقطه نام گذاری شده روی محور چه عددی را نشان می دهد؟



$$x^2 = 2^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow x = \sqrt{20} \Rightarrow A = -\sqrt{20}$$

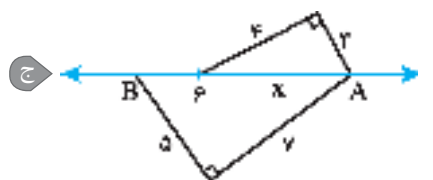


$$x^2 = 2^2 + 4^2 = 20 + 16 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} \Rightarrow B = -20 + \sqrt{36}$$

(از -20 به اندازه x به سمت راست رفته)

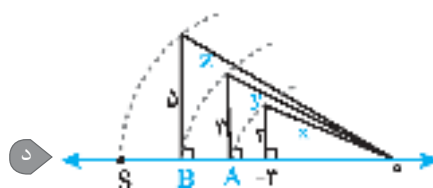


عدد مورد نظر در این سوالات از سه قسمت تشکیل شده: حرکت جهت مرکز. یعنی از چه عددی، به کدام سمت (+ یا -)، به چه اندازه حرکت انجام شده است.



$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 5 \Rightarrow A = 6 + 5 = 11$$

$$AB^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow AB = \sqrt{50} \Rightarrow B = 11 - \sqrt{50}$$

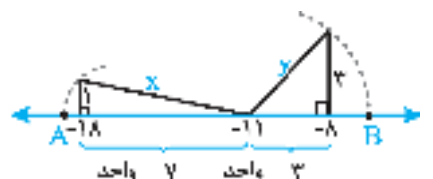


$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow A = -9 - 5 = -14$$

$$y^2 = (5)^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow y = \sqrt{34} \Rightarrow B = -14 - \sqrt{34}$$

$$z^2 = (\sqrt{34})^2 + 5^2 = 34 + 25 = 59 \Rightarrow z = \sqrt{59}$$

$$S = -14 - \sqrt{59} = -\sqrt{59}$$



طول پاره خط AB چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

پاسخ: گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5 \\ y^2 &= 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = x + y = 5 + 5 = 10 = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$



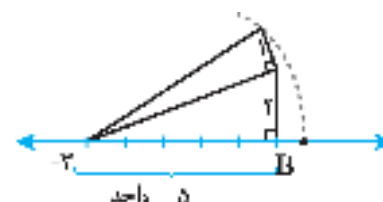
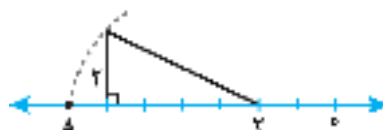
نقطه نمایش اعداد زیر را روی محور بیابید.

الف $A = -2 - \sqrt{2} \Rightarrow$ از -2 به سمت چپ مثلث رسم شود

اضلاع مثلث قائم ۲، ۴ $\rightarrow 20$

ب $B = \sqrt{30} - 3 \Rightarrow B = -3 + \sqrt{30} \Rightarrow$ مثلث رسم شود

دو مثلث قائم الزاویه: $\{1, 2, 5\}$ و $\{3, 4, 5\}$ مثلث دوم مثلث اول



۷۰