

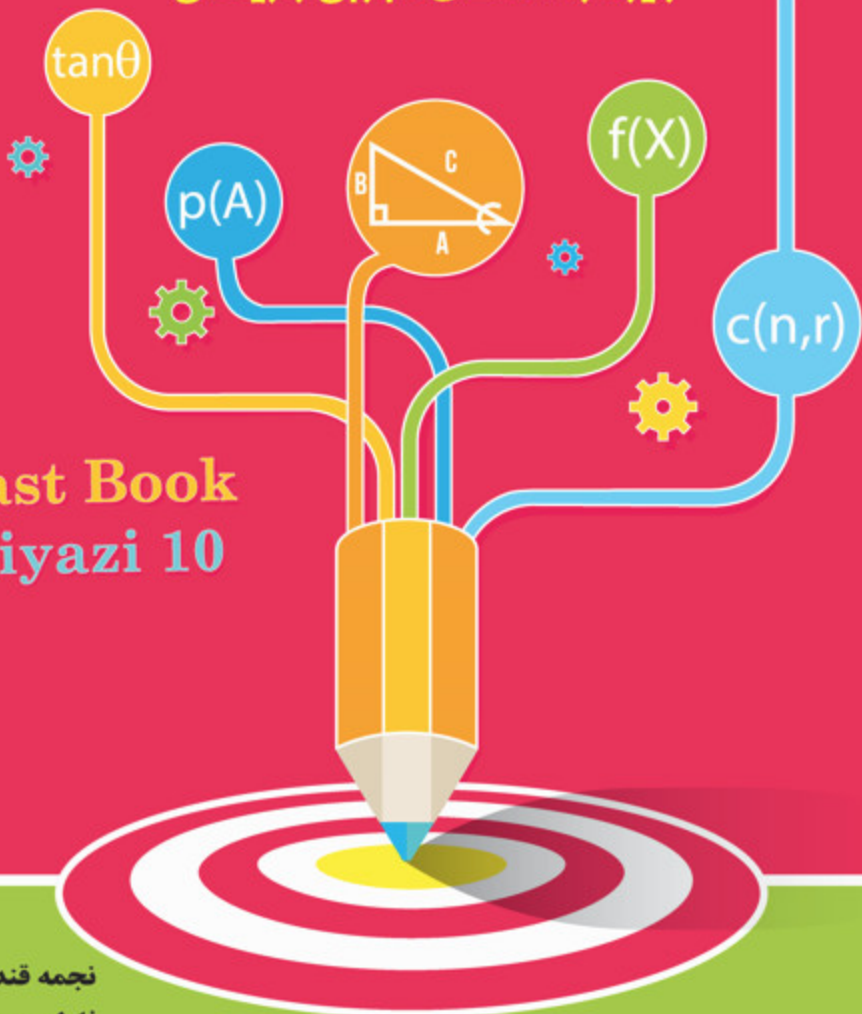


انتشارات لوح برتر

فست بوک ریاضی دهم

آموزش سریع و آسان مفاهیم ریاضی دهم

ویژه رشته های تجربی و ریاضی



Fast Book
Riyazi 10

نجمه قندالی
فاطمه بوربور

فست بوك رياضى دهم

آموزش سریع و آسان مفاهیم ریاضی

ویژه رشته‌های تجربی و ریاضی

مؤلفان

نجمه قذافی، فاطمه بوروبور

انتشارات لوح برتر



فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

آموزش و تمرین	۶
مثال و پاسخ	۷
بیش‌تر بدانیم	۳۴
تست‌های فصل	۴۰

فصل دوم: مثلثات

آموزش و تمرین	۴۸
مثال و پاسخ	۴۹
بیش‌تر بدانیم	۶۸
تست‌های فصل	۷۹

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارتهای جبری

آموزش و تمرین	۸۶
مثال و پاسخ	۸۷
بیش‌تر بدانیم	۱۲۰
تست‌های فصل	۱۲۹

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

آموزش و تمرین	۱۳۶
مثال و پاسخ	۱۳۷
بیش‌تر بدانیم	۱۸۲
تست‌های فصل	۱۹۰

آزمون نوبت اول

آزمون نوبت اول	۱۹۹
----------------	-------	-----

فصل پنجم: تابع

آموزش و تمرین	۲۰۴
مثال و پاسخ	۲۰۵
بیش‌تر بدانیم	۲۳۶
تست‌های فصل	۲۴۶

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

آموزش و تمرین	۲۵۴
مثال و پاسخ	۲۵۵
بیش‌تر بدانیم	۲۶۸
تست‌های فصل	۲۷۳

فصل هفتم: آمار و احتمال

آموزش و تمرین	۲۸۰
مثال و پاسخ	۲۸۱
بیش‌تر بدانیم	۲۹۴
تست‌های فصل	۲۹۸

آزمون نوبت دوم

آزمون نوبت دوم	۳۰۹
----------------	-------	-----

برای افزایش مهارت تست‌زنی به کتاب دوم این مجموعه به نام
«تست ریاضی فست‌بوک دهم» مراجعه کنید.

برنام اول که هر چه داریم از اوست

مقدمه ناشر

با استقبال بی نظیر دانش آموزان عزیز از فست بوک های ریاضی هفتم، هشتم و نهم و درخواست بسیاری از دبیران فرهیخته متوسطه دوم، با عنایت پروردگار و همت گروه مؤلفان توانستیم مجموعه حاضر را با نام «**فست بوک ریاضی دهم**» ویژه رشته های تجربی و ریاضی با رویکرد آموزشی، یک صفحه آموزش و تمرین، یک صفحه مثال و پاسخ، طراحی و تدوین کنیم.

برای آشنایی بیش تر شما عزیزان با این مجموعه، برخی از ویژگی های اصلی آن را با هم مرور می کنیم:
۱- کتاب حاضر کلیه مباحث کتاب درسی پایه دهم رشته تجربی و ریاضی را مطابق کتاب جدیدالتألیف دربرمی گیرد. مؤلفان این مجموعه تمام تلاش خود را به کار برده اند تا همه نکات کلیدی درس ها و تمرین های کتاب درسی را آموزش دهند.

۲- سعی کرده ایم با زبانی ساده و روان، تمام مفاهیم ریاضی را آموزش دهیم. به طور کلی ساختار این کتاب به گونه ای است که صفحات زوج به آموزش و تمرین و صفحات فرد به حل مثال اختصاص داده شده است.
۳- برای دانش آموزان مستعدتر، در پایان هر فصل، مطالبی فراتر از سطح کتاب درسی با نام «بیش تر بدانیم» ارائه شده است.

۴- در پایان هر فصل انواع تست های کنکور و تألیفی با پاسخ های کاملاً تشریحی و آموزشی مطابق با کتاب درسی ارائه شده است.

۵- یک دوره آزمون های تشریحی ۲۰ نمره ای ویژه نیم سال اول و یک دوره آزمون پایان سال تکمیل کننده این مجموعه است.

۶- برای حل تست های بیش تر به «کتاب تست ریاضی فست بوک دهم» مراجعه کنید.
حجم مناسب و جامع بودن این کتاب برای دانش آموزان هیجان انگیز است. ساختار این مجموعه به گونه ای است که کار دبیر در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش آموزان، ساده و آسان می شود.
امید است این مجموعه مورد استقبال دبیران فرهیخته، دانش آموزان عزیز و اولیای گرامی قرار گیرد.
شما عزیزان می توانید نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق پل های ارتباطی زیر با ما در میان بگذارید.

صادق گرجی

مدیر انتشارات لوح برتر

پل های ارتباطی شما با ما

۶۶۹۷۲۴۷۸ ۶۶۹۷۱۸۰۴ ۶۶۹۷۱۹۷۰ ۶۶۱۷۵۰۵۳

کانال انتشارات @Lohebartarpub

شماره تلگرام: ۰۹۳۶۰۴۷۵۱۲۵

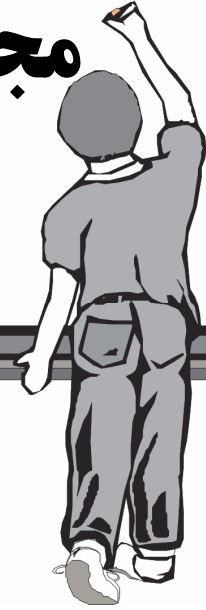
سایت: Lohebartar.ir

پست الکترونیکی: Lohebartar@gmail.com

سامانه پیامکی: ۳۰۰۰۵۳۶۴۰۰۰۵۳۶

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله



آموزش و تمرین

مجموعه‌های اعداد

معرفی مجموعه: یک دسته کاملاً مشخص و متمایز از اشیاء یا اعداد را مجموعه می‌نامیم. مجموعه‌ها را معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم.

یادآوری چند مجموعه:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

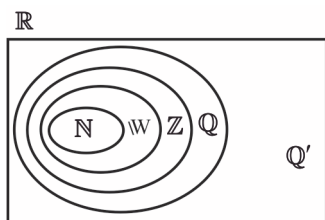
مجموعه اعداد گویا

مجموعه همه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. $\mathbb{Q}' =$ مجموعه اعداد گنگ

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

مجموعه اعداد حقیقی

نمایش مجموعه‌ها با نمودار ون:



رابطه زیر مجموعه بودن مجموعه‌های فوق به صورت زیر است:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): از نماد ($=, \neq, \subseteq, \not\subseteq, \in, \notin$) استفاده کنید.

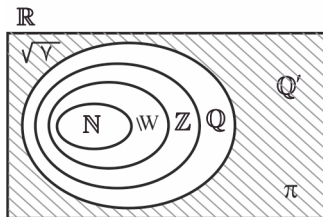
- | | |
|---|--|
| الف) $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$ | ب) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}'$ |
| ج) $2\sqrt{21} \in \mathbb{Z}$ | د) $3/14 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ |
| هـ) $\mathbb{R} \in \mathbb{Q}'$ | و) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$ |
| ز) $\{0\} \in \mathbb{W} - \mathbb{N}$ | ح) $\mathbb{N} - \mathbb{W} \in \mathbb{Q}'$ |
| ط) $\mathbb{R} \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ | |

پاسخ:

- | | | |
|----------------|---------------------|--------------------|
| الف) \notin | ب) \notin | ج) \notin |
| د) \in | هـ) $\not\subseteq$ | و) $\not\subseteq$ |
| ز) \subseteq | ح) \subseteq | ط) $=$ |

مثال (۲): مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی نمودار ون نمایش دهید و دو عضو دلخواه از آن را بنویسید.

پاسخ:



مجموعه اعداد گنگ (\mathbb{Q}') نام دارد. π و $\sqrt{7}$ دو عضو از این مجموعه هستند.

مثال (۳): درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- الف) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ ب) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \not\subset \mathbb{Q}$

پاسخ:

- الف) درست ب) نادرست

تست‌های فصل اول

تست‌های این بخش، مهارت تست‌زنی شما را افزایش می‌دهند اما برای پاسخگویی به سؤالات تستی تألیفی و کنکوری بیش‌تر باید از کتاب دوم این مجموعه به نام «تست ریاضی فست‌بوک دهم» استفاده کنید.

۱- چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟

الف) $W \subseteq Z$ ب) $Q \subseteq N$ ج) $W - N = \emptyset$

د) $W \cap Z \subseteq W$ هـ) $Q - R = \emptyset$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲- اگر $(-\infty, -m-1] \cap [2m+5, +\infty)$ یک مجموعه تک‌عضوی باشد، m کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۳- اگر $[1, 5] = [2, x] \cup [y, 4]$ ، آن‌گاه حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱۶

۴- اگر $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$ و $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(سراسری انسانی ۹۶)

۱) $A - B$ ۲) $B - A$ ۳) $A \cup B$ ۴) $A \cap B$

۵- اگر $n \in N$ ، $A_n = \{m \in Z \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد، مجموعه $A_1 \cup (A_8 - A_4)$ چند عضو دارد؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۸

۶- اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموعه مرجع، $A = \{x \in U \mid x \text{ مضرب } 3\}$ و $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ، آن‌گاه تعداد

عضوهای کدام مجموعه از بقیه بیش‌تر است؟

۱) $A' - B'$ ۲) $B - A$ ۳) $A \cup B$ ۴) $(A \cap B)'$

۷- کدام گزینه صحیح است؟ (U مجموعه مرجع نامتناهی است.)

۱) اگر A نامتناهی باشد، آن‌گاه A' نامتناهی است.

۲) اگر A و B نامتناهی باشند، آن‌گاه $A - B$ متناهی است.

۳) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A' \subseteq B'$ می‌باشد.

۴) اگر B متناهی باشد و $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A' \cup B'$ نامتناهی است.

۸- در جشن تولد بهار، ۴۴ نفر از دوستانش شرکت کرده‌اند. در این جشن ۲۵ نفر پرتقال، ۱۱ نفر سیب، ۹ نفر

بستنی خورده‌اند. در صورتی که ۴ نفر سیب و پرتقال خورده باشند و هیچ‌کدام از آن‌هایی که پرتقال خورده‌اند بستنی

نخورده باشند و ۴ نفر چیزی نخورده باشند، چند نفر سیب و بستنی خورده‌اند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ تشریحی تست‌های فصل اول

✓ ۱- گزینه «۳»

الف، د، هـ صحیح می‌باشد.

ب، ج غلط می‌باشد.

✓ ۲- گزینه «۲»

کافیست نقطه انتهایی بازه اول را با نقطه ابتدای بازه دوم مساوی قرار دهیم و معادله را حل کنیم:

$$-m - 1 = 2m + 5 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

✓ ۳- گزینه «۱»

$$[2, x] \cup [y, 4] = [1, 5] \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 26$$

✓ ۴- گزینه «۴»

ابتدا مجموعه A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, \dots \right\}$$

$$A \cap B = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\} \text{ متناهی}$$

✓ ۵- گزینه «۳»

$$A_1 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, 2^m \leq 2 \} = \{ 0, 1 \}$$

$$A_4 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, 2^m \leq 8 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

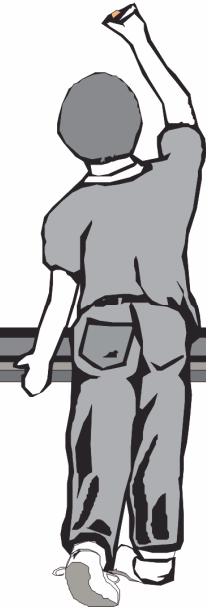
$$A_8 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -8, 2^m \leq 16 \} = \{ -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

$$(A_8 - A_4) \cup A_1 = \{ -7, -6, -5, -4, 4 \} \cup \{ 0, 1 \} = \{ -7, -6, -5, -4, 0, 1, 4 \}$$

بنابراین دارای ۷ عضو است.

فصل دوم

مثلثات

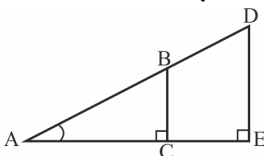


آموزش و تمرین

نسبت‌های مثلثاتی - روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

* هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

* دو مثلث قائم‌الزاویه که دارای یک زاویه حاده یکسان باشند، در حالت (ز) با هم متشابه‌اند.



$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} = \text{مشترک} \\ \widehat{C} = \widehat{E} = 90^\circ \end{array} \right. \xrightarrow[\text{در حالت زز}]{\Delta ABC \sim \Delta ADE} \text{نسبت اضلاع} = \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

(۱) (۲) (۳)

$$(۱), (۲) \frac{BC}{DE} \nearrow \frac{AB}{AD} \rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \rightarrow \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \sin A$$

$$(۳), (۲) \frac{AC}{AE} \nearrow \frac{AB}{AD} \rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \rightarrow \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \cos A$$

$$(۱), (۳) \frac{BC}{DE} \nearrow \frac{AC}{AE} \rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \rightarrow \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \tan A$$

* عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}$$

* در یک مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌گوییم.

* روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

به سادگی می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} ۱) \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ ۲) \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \rightarrow ۳) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = ۱$$

بنابراین داریم:

$$۴) \tan \alpha = \frac{۱}{\cot \alpha}$$

$$۵) \cot \alpha = \frac{۱}{\tan \alpha}$$

* اگر حاصل جمع دو زاویه α و β برابر 90° شود، آن‌گاه روابط زیر برقرار است.

$$۶) \sin \alpha = \cos \beta$$

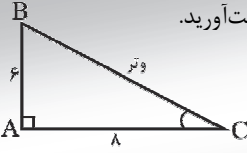
$$۸) \tan \alpha = \cot \beta$$

$$۷) \cos \alpha = \sin \beta$$

$$۹) \cot \alpha = \tan \beta$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): در مثلث قائم الزاویه زیر، نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زاویه C را به دست آورید.



پاسخ: طبق رابطه فیثاغورس، وتر را به دست می‌آوریم:

$$\text{وتر} = \sqrt{100} = 10 \rightarrow \text{وتر} = 36 + 64 = 100 \rightarrow \text{وتر}^2 = 6^2 + 8^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

مثال (۲): در مثلث قائم الزاویه‌ای اگر $\sin A = \frac{4}{5}$ و $\cos A = \frac{3}{5}$ باشد، مطلوب است:

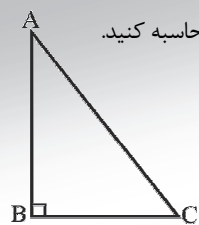
$\tan A =$ $\cot A =$

پاسخ:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{4}{3}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3}{4}$$

مثال (۳): در مثلث قائم الزاویه زیر $\tan A = \frac{3}{4}$ می‌باشد. مقدار $\cot A$ و $\cot C$ را محاسبه کنید.



پاسخ:

برای محاسبه $\cot A$ ، می‌توانیم از نکته (۵) صفحه قبل استفاده کنیم:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} \Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$$

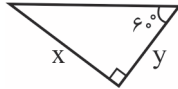
با توجه به این که $\widehat{B} = 90^\circ$ و $\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ$ ، بنابراین با استفاده از رابطه (۹) در صفحه قبل داریم:

$$\cot C = \tan A \Rightarrow \cot C = \frac{3}{4}$$

تست‌های فصل دوم

تست‌های این بخش، مهارت تست‌زنی شما را افزایش می‌دهند اما برای پاسخگویی به سؤالات تستی تألیفی و کنکوری بیش‌تر باید از کتاب دوم این مجموعه به نام «تست ریاضی فست‌بوک دهم» استفاده کنید.

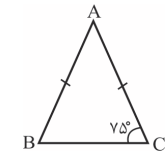
۱- در مثلث زیر حاصل $\frac{x}{y}$ برابر است با:



$\sqrt{3}$ (۲)
۴ (۴)

$\sqrt{2}$ (۱)
۲ (۳)

۲- در مثلث ABC داریم $AB = AC = 5$ و $\widehat{C} = 75^\circ$. مساحت این مثلث کدام است؟



$5/75$ (۲)
 $6/75$ (۴)

$5/5$ (۱)
 $6/25$ (۳)

۳- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۴)

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

۴- در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویه بین دو قطر 135° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر

(سراسری تجربی ۹۲)

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۲۴ (۲)

$\sqrt{2}$ است؟ (۱)

۵- در مثلثی یکی از زاویه‌ها 60° درجه و ضلع مقابل به این زاویه $3\sqrt{7}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازه ضلع سوم کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۶)

$5\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{3}$ و $4\sqrt{3}$ (۳)

۴ و ۷ (۲)

۳ و ۶ (۱)

۶- اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۷- چه تعداد از نسبت‌های مثلثاتی زاویه 186° مثبت هستند؟

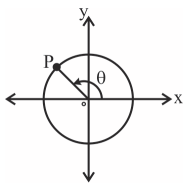
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸- مطابق شکل، نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد و داریم $\cos \theta = -\frac{5}{13}$.



در این صورت حاصل $x + y$ کدام است؟

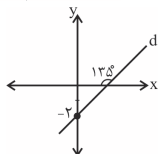
$\frac{7}{13}$ (۴)

$\frac{6}{13}$ (۳)

$\frac{4}{13}$ (۲)

$\frac{2}{13}$ (۱)

۹- با توجه به شکل، معادله خط d کدام است؟



$y = x - 2$ (۲)

$y = x - 1$ (۴)

$y = 1 - x$ (۱)

$y = 2 - x$ (۳)

پاسخ تشریحی تست‌های فصل دوم

۱- گزینه «۲»

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y}$$

۲- گزینه «۳»

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{A}$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = 6/25$$

۳- گزینه «۳»

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 16 \times 9 \times \sin \alpha$$

$$24\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 16 \times 9 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

و همچنین داریم:

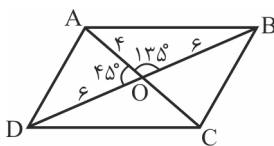
$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

چون در سؤال ذکر شده بزرگ‌ترین ضلع مثلث، بنابراین α منفرجه است و $\cos \alpha$ منفی خواهد بود.

$$c^2 = 16^2 + 9^2 - 2(16)(9)\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow c = 23$$

بنابراین طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

۴- گزینه «۲»



$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 45^\circ = 6\sqrt{2}$$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع فوق، مساحت ۴ مثلث ایجاد شده با هم برابر است.

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{\square} = 4S_{\Delta AOD} = 4 \times 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

فصل سوم

توان‌های گویا و

عبارت‌های جبری



آموزش و تمرین

تجزیه به کمک اتحادها

* تجزیه به کمک اتحاد مکعب مجموع:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \text{ یا } (a + b)(a + b)(a + b)$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 \text{ یا } (a - b)(a - b)(a - b)$$

* هر یک از عبارتهای $(a + b)$ و $(a - b)$ را یک عامل یا یک شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند.

این دو علامت موافق یکدیگرند

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

این دو علامت مخالف یکدیگرند

این دو علامت موافق یکدیگرند

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

این دو علامت مخالف یکدیگرند

تمرین: جاهای خالی را به کمک اتحادها پر کنید.

الف) $(\square - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - \square$

ب) $8 - \square = (\square - y)(4 + 2y + y^2)$

پاسخ:

الف) $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

ب) $8 - y^3 = (2 - y)(4 + 2y + y^2)$

مثال و پاسخ

مثال (۱): عبارتهای زیر را تا حد ممکن تجزیه کنید.

الف) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

ب) $\frac{1}{8} + x^3$

ج) $x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1$

د) $x^6 - y^6$

پاسخ:

$$\begin{array}{c} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ x \quad \quad 2 \end{array} = (x-2)^3 \text{ یا } (x-2)(x-2)(x-2)$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{8} + x^3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{1}{2} \quad x \end{array} = \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + x^2\right)$$

$$\begin{array}{c} x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ x^3 \quad \quad 1 \end{array} = (x^3 + 1)^3 \text{ یا } (x^3 + 1)(x^3 + 1)(x^3 + 1)$$

$$\begin{array}{c} x^6 - y^6 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x^2 \quad y^2 \end{array} \stackrel{\text{جفتی و لایه}}{=} (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \stackrel{\text{مزدوج}}{=} (x-y)(x+y)(x^2 + x^2y^2 + y^4)$$

مثال (۲): حاصل عبارتهای زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) 102^2

ب) 99^3

ج) 101×99

پاسخ:

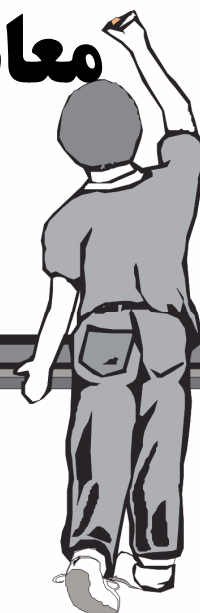
$$\text{الف) } 102^2 = (100 + 2)^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

$$\text{ب) } 99^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 300000 + 3000 - 1 = 970299$$

$$\text{ج) } 101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 10000 - 1 = 9999$$

فصل چهارم

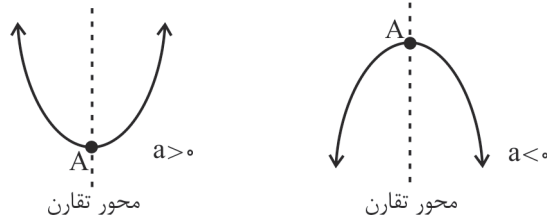
معادله‌ها و نامعادله‌ها



آموزش و تمرین

سهمی

* نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b, c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ ، یک سهمی است که به یکی از دو صورت زیر می‌باشد:



* نقطه A در شکل‌های فوق، رأس سهمی می‌باشد.

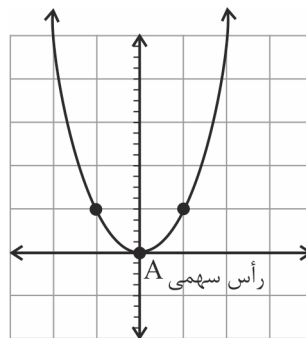
اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است.

* خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

تمرین: معادله $y = x^2$ را رسم کنید و در آن رأس سهمی و خط تقارن را مشخص کنید.

✓ **پاسخ:** می‌توانیم با داشتن حداقل ۳ نقطه، سهمی را رسم کنیم.

x	-۱	۰	۱
$y = x^2$	۱	۰	۱



محور تقارن

مثال و پاسخ

مثال: نمودارهای زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

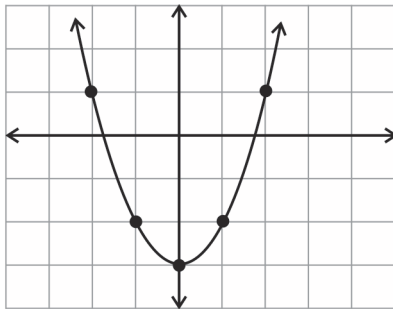
الف) $y = x^2 - 3$

ب) $y = 1 - x^2$

پاسخ:

الف) $y = x^2 - 3$

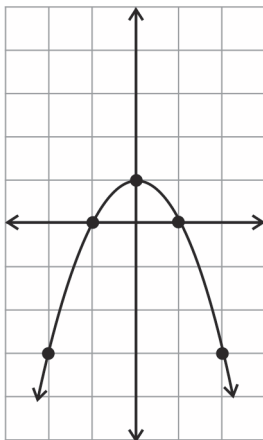
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 - 3$	1	-2	-3	-2	1



$a > 0$

ب) $y = 1 - x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$y = 1 - x^2$	-3	0	1	0	-3



$a < 0$

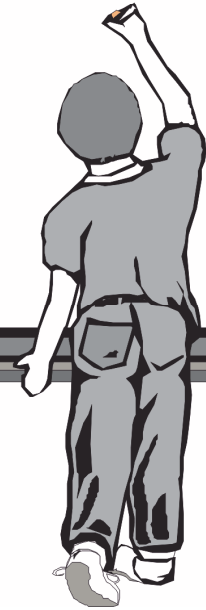
آزمون

نوبت اول

ردیف	سؤالات	بارم
۱	<p>در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A مجموعه‌ای خواهد بود.</p> <p>ب) حاصل $\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ$ برابر است.</p> <p>ج) حاصل $\sqrt[3]{-0/01} \times \sqrt[3]{2/7}$ برابر است.</p> <p>د) اگر $(-3, 7)$ و $(0, 7)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن به صورت $x = \dots$ می‌باشد.</p>	۱
۲	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>۱) اگر تمام اعضای مجموعه اعداد حسابی را قرینه کنیم، کدام مجموعه به دست می‌آید؟ الف) $\mathbb{Q} - \mathbb{N}$ ب) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ج) $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ د) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$</p> <p>۲) اگر $\tan \theta < 0$ و $\sin \theta > 0$ باشد، آن‌گاه زاویه θ در کدام ربع قرار دارد؟ الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم</p> <p>۳) حاصل عبارت $(x-1)(x^2+x+1)+1$ کدام است؟ الف) x^3 ب) $(x-1)^3$ ج) x^3-1 د) x^3+1</p> <p>۴) طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 4x$ برابر کدام است؟ الف) ۱ ب) -۱ ج) ۲ د) -۲</p>	۱
۳	<p>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.</p> <p>ب) شیب خطی که با محور x زاویه 30° می‌سازد، برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.</p> <p>ج) اگر n زوج باشد آن‌گاه $(\sqrt[n]{a})^n = a$ است.</p> <p>د) معادله $x^2 - 6x + 9 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.</p>	۱
۴	<p>به سؤالات زیر به صورت کوتاه پاسخ دهید.</p> <p>الف) جمله عمومی الگوی روبه‌رو را بیابید.</p> <p>ب) زاویه 65° بین کدام زوایای مرزی قرار دارد.</p> <p>ج) عبارت $x^3 - 8$ را تجزیه کنید.</p> <p>د) جواب معادله $x^2 + 5 = 0$ را به کمک ریشه‌گیری به دست آورید.</p>	۲

فصل پنجم

تابع

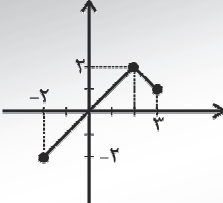


آموزش و تمرین

بیش‌تر بدانیم

* گاهی اوقات نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ داده شده و سؤالاتی مطرح می‌شود که باید با استفاده از نمودار تابع f به سؤالات پاسخ دهیم.

تمرین (۱): نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. با توجه به آن به سؤالات زیر پاسخ دهید.

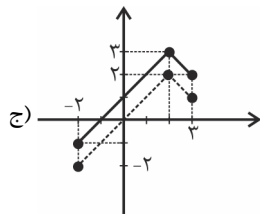


الف) دامنه و برد تابع $y = f(x)$ را بیابید.
 ب) دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ را بیابید.
 ج) نمودار $f(x) + 1$ را رسم کنید.

☑ پاسخ:

الف) دامنه $[-2, 3]$ برد $[-2, 2]$

ب) دامنه $[0, 3]$ \rightarrow X هایی که عرض نامنفی دارند $f(x) \geq 0$ زیرا رادیکال (ب)



یک واحد انتقال به سمت بالا

تمرین (۲): اگر برد تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، برد تابع $y = f(x+1) + 3$ را بیابید.

☑ پاسخ:

$$-1 \leq f(x) \leq 2 \rightarrow -1 \leq f(x+1) \leq 2$$

$$\xrightarrow{+3} 2 \leq f(x+1) + 3 \leq 5$$

$$\rightarrow \text{برد} = [2, 5]$$

فصل ششم

شمارش، بدون شمردن



تست‌های فصل ششم

تست‌های این بخش، مهارت تست‌زنی شما را افزایش می‌دهند اما برای پاسخگویی به سؤالات تستی تألیفی و کنکوری بیش‌تر باید از کتاب دوم این مجموعه به نام «تست ریاضی فست‌بوک دهم» استفاده کنید.

۱- در یک آزمون ۶ سؤالی چهارگزینه‌ای، به چند طریق می‌توان به سؤالات پاسخ داد به طوری که امکان پاسخ ندادن به سؤال‌ها نیز وجود داشته باشد؟

- (۱) ۶^۴ (۲) ۴^۶ (۳) ۵^۶ (۴) ۵^۴

۲- با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ (بدون تکرار)، چند عدد چهاررقمی زوج و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۹۶ (۳) ۷۲ (۴) ۵۶

۳- چند عدد سه رقمی وجود دارد که حداقل یکی از ارقامش اول باشد؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۶۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۳۲۰

۴- با حروف کلمه «جمهوری» و بدون تکرار، چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع نشود؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۶۴ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰

۵- چند تابع از مجموعه سه عضوی A به مجموعه چهار عضوی B می‌توان نوشت؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۱۶ (۳) ۸۱ (۴) ۶۴

۶- از تساوی $(n-2)! = \frac{(n+1)!}{506(n-1)}$ مقدار n برابر است با:

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۳ (۴) ۲۲

۷- ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرارداده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۸- حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی ۸۴)

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۱۳۴۰ (۳) ۵۴۰ (۴) ۳۶۰

۹- شش دوست که ۲ نفر از آن‌ها با هم خواهر هستند، می‌خواهند برای گرفتن عکس یادگاری در یک صف بایستند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است اگر دو خواهر کنار هم نباشند؟

- (۱) ۴۸۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۲۸۰

۱۰- با حروف کلمه FARHAD چند رمز عبور ۶ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که دو حرف A در کنار هم نباشند؟ (سراسری انسانی ۹۶)

- (۱) ۳۰۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۴۰

پاسخ تشریحی تست‌های فصل ششم

✓ ۱- گزینه «۳»

برای هر سؤال ۵ حالت می‌توان در نظر گرفت: $\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 5^6$

✓ ۲- گزینه «۲»

عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ یعنی اولین رقم از سمت چپ باید ۳ یا ۴ یا ۵ قرار بگیرد:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 36 \quad \text{حالت اول}$$

فقط ۳

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 24 \quad \text{حالت دوم}$$

فقط ۴ ۲ یا ۰

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 36 \quad \text{حالت سوم}$$

فقط ۵ ۴ یا ۲ یا ۰

$$\text{جواب} = 36 + 24 + 36 = 96$$

✓ ۳- گزینه «۱»

کوتاه‌ترین راه‌حلی که می‌توان پیشنهاد داد، حذف حالت‌های نامطلوب است:

(تعداد سه رقمی‌هایی که فاقد ارقام اول هستند) - (تعداد کل سه رقمی‌ها) = تعداد

$$= (\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}) - (\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}) = 720$$

ارقام غیراول: $\{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$

✓ ۴- گزینه «۳»

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 80$$

حرف اول حرف دوم حرف سوم



تمام حروف به غیر از «ج» و «ی»

✓ ۵- گزینه «۴»

راه‌حل اول: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر با n^m می‌باشد: $4^3 = 64$

راه‌حل دوم: برای هر سه عضو مجموعه A ، چهار انتخاب از مجموعه B داریم. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 64$$

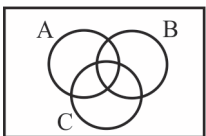
فصل هفتم

آمار و احتمال



آزمون

نوبت دوم

ردیف	سؤالات	بارم						
۱۱	با حروف «کلاس دهم» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «ه» و «م» کنار هم باشند. ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به کلمه «دهم» ختم می‌شود؟	۱/۷۵						
۱۲	از میان ۸ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز می‌خواهیم ۶ مهره انتخاب کنیم. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد، اگر: الف) از هر رنگ ۲ مهره انتخاب شود. ب) حداقل ۴ مهره آن سفید باشد.	۱/۵						
۱۳	۳۴ درصد از افراد یک جامعه از فروشگاه A و ۶۲ درصد از فروشگاه B و ۱۵ درصد از هر دو فروشگاه خرید می‌کنند. چه قدر احتمال دارد افراد حداقل از یکی از فروشگاه‌های A و B خرید کنند؟	۲						
۱۴	فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. با توجه به نمودار ون زیر، پیشامد A و B رخ دهد ولی C رخ ندهد را هاشور بزنید.	۰/۷۵						
								
۱۵	با توجه به جدول زیر متغیر یا نوع متغیر را مشخص کنید.	۱/۵						
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>متغیر</td> <td>سطح تحصیلات</td> <td>وزن یک میز</td> </tr> <tr> <td>نوع متغیر</td> <td></td> <td>کیفی اسمی</td> </tr> </table>	متغیر	سطح تحصیلات	وزن یک میز	نوع متغیر		کیفی اسمی	
متغیر	سطح تحصیلات	وزن یک میز						
نوع متغیر		کیفی اسمی						
تعداد سؤالات: ۱۵		جمع نمره: ۲۰						